Esercitazione di Matematica – Test di Autovalutazione

Contenuti: operazioni tra insiemi; operazioni con i radicali; disequazioni di secondo grado e frazionarie; equazioni e disequazioni irrazionali; espressioni, equazioni e disequazioni goniometriche

1. Dati gli intervalli $A=[2,7)$, $B=(7,9]$, determinare $A\cap B, A\cup B$

Suggerimento: Per trovare l'intersezione $A\cap B$ ***devo risolvere un sistema***

$$\begin{cases} 2\le x<7 \\ 7<x\le 9 \end{cases}$$

Per trovare $A\cup B$ ***devo scrivere gli insiemi uno di seguito all'altro***

2. Dati gli intervalli $A=[3,10)$, $B=[5,+\infty)$, $C=(2,8]$, $D=(-\infty,7]$, determinare $(A\cap B)\cap(C\cup D)$

3. Calcolare: $\sqrt{8}+\sqrt{18}$, $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}:a$

4. Risolvere le seguenti equazioni di primo o di secondo grado *(attenzione al dominio quando si è in presenza di equazioni frazionarie, occorre verificare se tutte le soluzioni trovate sono accettabili)*

1 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{9}=\frac{x}{3}(3x-2)$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{12}\right\}\right]$

2 $3-\frac{5}{x-1}+\frac{2}{x+1}=-\frac{3x^2}{1-x^2}$ $\left[S=\left\{-\frac{10}{3}\right\}\right]$

3 $\frac{x}{x^2-2x+1}+\frac{5}{2x-2}=\frac{x+3}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}$ $\left[S=\left\{\frac{1\pm 2\sqrt{7}}{9}\right\}\right]$

4 $\frac{x+9}{x^2-9}+1=\frac{x}{x+2}$ $\left[S=\left\{0,-\frac{11}{3}\right\}\right]$

5 $1+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x+1}{2-x}$ $\left[S=\left\{0,\frac{4}{5}\right\}\right]$

6 $\frac{x+2}{6x+6}+\frac{6}{x^2-x-2}=\frac{2(x+1)}{3x-6}$ $\left[S=\left\{-\frac{14}{3}\right\}\right]$

7 $\frac{11-x}{(3-x)(x+1)}+\frac{3x}{x+1}=\frac{2x+1}{x-3}+\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ $[S=\varnothing]$

8 $\frac{2+x}{5(x+1)}=\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x^2-x}{x^2-x-2}$ $\left[S=\left\{-\frac{9}{2},-\frac{1}{2}\right\}\right]$

5. Risolvere le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

9 $2x^3-5x^2-3x=0$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{2},0,3\right\}\right]$

10 $4x^3-7x^2-7x+4=0$ $\left[S=\left\{-1,\frac{11\pm\sqrt{57}}{8}\right\}\right]$

12 $6x^4-13x^2+5=0$ $\left[S=\left\{\pm\frac{1}{3}\sqrt{15},\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}\right]$

13 $4x^4+13x^3-13x^2-4x=0$ $\left[S=\left\{-4,-\frac{1}{4},0,1\right\}\right]$

15 $\frac{x^2+3}{x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^2-3}=2$ $[S=\{\pm 1\}]$

19 $\frac{x^2-1}{x^2+2x}-x=\frac{x^2-3}{x}-1$ $\left[S=\left\{-1,\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}\right]$

6. Risolvere le seguenti **disequazioni** di secondo grado:

$2x^2 - 3x + 1 \le 0 \qquad 4x^2 - 12x + 9 > 0 \qquad -2x^2 + 12x - 5 > 0$

7. Risolvere le **disequazioni** numeriche frazionarie:

26 $\dfrac{3x^2+1}{3x-2} \le x$ $\qquad \left[-\dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{2}{3}\right]$

27 $\dfrac{4x^2+x+4}{3x} > 1 + x + \dfrac{x+3}{4}$ $\qquad [0 < x < 1 \ \vee \ x > 16]$

28 $\dfrac{2x^2-5x}{x^2-4x+3} > 0$ $\qquad \left[x < 0 \ \vee \ 1 < x < \dfrac{5}{2} \ \vee \ x > 3\right]$

30 $9x^4 - 46x^2 + 5 \le 0$ $\qquad \left[-\sqrt{5} \le x \le -\dfrac{1}{3} \ \vee \ \dfrac{1}{3} \le x \le \sqrt{5}\right]$

8. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti **disequazioni frazionarie**, stabilendo se si tratta di un insieme limitato oppure no**:**

a. $\dfrac{1}{x^2+4} < -x^2 - 1$

b. $\dfrac{3x+1}{x-1} > \dfrac{2x^3+7x}{x^2-x}$

c. $1 + x > \dfrac{x}{|x|}(1-x)$

9. Risolvere i **sistemi di disequazioni**:

39 $\begin{cases} 8x^2 - 1 > 0 \\ x^2 + x + 6 > 0 \end{cases}$ $\qquad \left[x < -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \ \vee \ x > \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$

40 $\begin{cases} \dfrac{2-x}{x-3} \le 0 \\ x^3 + x - x^2 - 1 > 0 \end{cases}$ $\qquad [1 < x \le 2 \ \vee \ x > 3]$

41 $\begin{cases} \dfrac{x(x^2-5)}{x+1} < 0 \\ \dfrac{x^2}{x-2} + 1 > 0 \end{cases}$ $\qquad [-2 < x < -1 \ \vee \ 0 < x < 1 \ \vee \ 2 < x < \sqrt{5}]$

10. Risolvere le **equazioni irrazionali**

44 $\sqrt{2x-4} = 8 - \dfrac{3}{2}x$ $\qquad [S = \{4\}]$

45 $1 + \sqrt{x^2-9} = x + 2$ $\qquad [S = \varnothing]$

46 $\sqrt[3]{2x+3x^2} - 3x = 0$ $\qquad \left[S = \left\{0, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{9}\right\}\right]$

47 $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x} = 1$ $\qquad [S = \{2\}]$

48 $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1} = -1$ $\qquad [S = \varnothing]$

11. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'**equazione irrazionale**: $\sqrt{x-5} - \sqrt{x-10} = 1$

Impongo prima l'esistenza delle due radici di indice pari per trovare il dominio dell'equazione

$\begin{cases} x - 5 \ge 0 \\ x - 10 \ge 0 \end{cases}$ ***Poi sposto una radice da una parte ed elevo al quadrato…dopo dovrò controllarel'accettabilità delle soluzioni trovate***

12. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti **disequazioni irrazionali**:

a. $1+\sqrt{1+x}>x$

b. $\sqrt{x^2-2x}>x-3$

c. $\sqrt{x^2-16}>|x+1|$

d. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-4}\leq 1$

e. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-3}>1$

13. Determinare l'insieme delle soluzioni della seguente **disequazione con i moduli:** $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|<4$

14. Esercizio risolto

Stabilisci se E, l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione

$$x^2-2\left|x^2+\frac{1}{2}x\right|>-2$$

è limitato oppure no.

Per prima cosa occorre risolvere la disequazione con i moduli

$$x^2-2\left|x^2+\frac{1}{2}x\right|>-2,$$

poi occorre ragionare sull'insieme E delle sue soluzioni.

L'essere $|a|<b$ è equivalente a: $-b<a<b$. La disequazione diventa:

$$-2\left|x^2+\frac{1}{2}x\right|>-2-x^2,$$

$$2\left|x^2+\frac{1}{2}x\right|<x^2+2,$$

$$\left|x^2+\frac{1}{2}x\right|<\frac{x^2}{2}+1,$$

$$-\frac{x^2}{2}-1<x^2+\frac{1}{2}<\frac{x^2}{2}+1,$$

Devo quindi risolvere un sistema:

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{2}-1<x^2+\frac{1}{2} \\ x^2+\frac{1}{2}<\frac{x^2}{2}+1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ha $E=(-2,1)$.
L'insieme E è limitato (in quanto lo è sia inferiormente che superiormente). Si ha: $inf(E)=-2$, $sup(E)=1$, l'insieme non ha massimo o minimo.

15. **9** L'equazione $|3x^2-5x-2|+|x^2-4|=0$:

a. non ha soluzioni reali

b. ha soluzione -2

c. ha soluzione 2

d. ha soluzioni $-2,\ 2,\ -\dfrac{1}{3}$

16. **10** La disequazione $|x^2 - x| > 6$ è equivalente a:

a. $x^2 - x > 6 \ \forall x \in R$

b. $\begin{cases} x^2 - x > 6 \\ x^2 - x < -6 \end{cases}$

c. $-6 < x^2 - x < 6$

d. $x^2 - x < -6 \vee x^2 - x > 6$

17. Risolvere la seguente **equazione esponenziale**: $\frac{9^{x-1}}{3^x} = 1$ ***Scomporre tutto in fattori ed applicare le proprietà delle potenze***

18. Risolvere la seguente **disequazione esponenziale:** $\frac{9^x}{3^{x+1}} < 3^4$ ***idem***

19. Risolvere la seguente **disequazione esponenziale con i moduli:** $2^x > 2^{|2x-1|}$

20. Calcolare $\log_2 4 - \log_2 16$ e $\frac{\log_2 16}{\log_2 8}$

21. Se $\log_7(\log_3(\log_2 x)) = 0$, quanto vale x?

22. Risolvere le seguenti **disequazioni logaritmiche**, determinando anche il dominio:

$$\log_3(x^2 - 3x) < \log_3(x+2)$$

$$\log_3(x^2 - 3) < 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2x+1}\right) \geq 0$$

23. Calcolare il valore della seguente **espressione goniometrica**:

$$2sen\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + 6sen\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}tg\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}$$

24. Risolvere le seguenti **equazioni e disequazioni goniometriche** elementari:

a. $senx = \frac{1}{2}$

b. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\tan x = \sqrt{3}$

d. $senx \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e. $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

f. $\tan x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g. $senx \geq \frac{\sqrt{2}}{6}$

h. $\cos 2x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

i. $sen\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

25. Esercizio risolto: Risolvere la seguente disequazione goniometrica: $\frac{4\cos^2 x - 1}{\cos x} < 0$

Una disequazione fratta si risolve esaminando la positività del numeratore e del denominatore e poi studiando quali sono gli intervalli della retta reale in cui il loro prodotto soddisfa il segno della disequazione di partenza. Si ha :

$$4cos^2x - 1 > 0 \quad \Rightarrow cos^2x > \frac{1}{4} \quad \Rightarrow cosx > \frac{1}{2} \cup \cos x < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \ \cup \ \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3} \ \cup \ \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$$

e $\cos x > 0 \quad \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Facciamo il grafico dei segni

Si ottiene che le soluzioni sono $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ \cup \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi.$