# Retta nel piano cartesiano

## 1 Assi cartesiani e rette parallele ad essi

x=0 asse delle ascisse

y=0 asse delle ordinate

x=h retta parallela all'asse y

y=q retta parallela all'asse x

## 2 Retta passante per l’origine

**Teorema:** *nel piano cartesiano, una retta r passante per O (l’origine degli assi), distinta da essi, è il luogo dei punti aventi ordinata proporzionale all’ascissa secondo un opportuno coefficiente angolare m* $\frac{y}{x} = m = cost$

Ovvero: al variare di $P \in r$, il rapporto tra la sua ordinata e la sua ascissa è sempre costante.

**Dimostrazione**

Analisi dell'enunciato del teorema

Sia $P \in Oxy$, sia $r$ una retta, $O \in r$

**i)** **Se** $P \in r$ allora $\frac{y_P}{x_P} = m = cost \quad \forall P \in r$

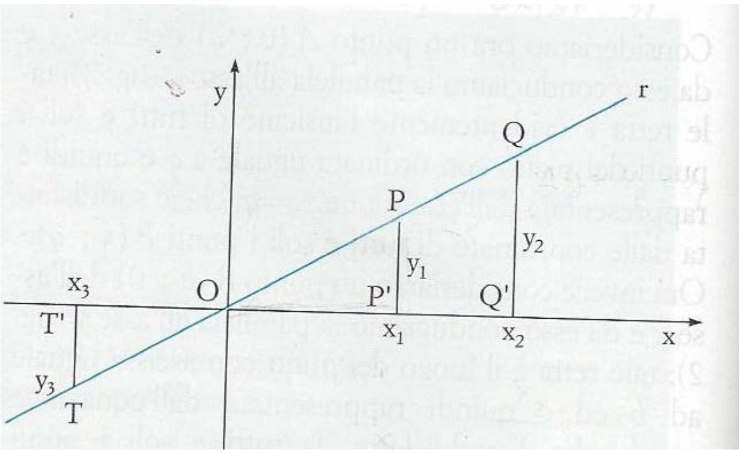
**ii)** **Se** $\frac{y_P}{x_P} = m = cost \quad con\ P$ un punto qualsiasi del piano cartesiano, allora $P \in r$

Dimostrazione della prima parte del teorema

Siano $P, Q \in r$ due punti distinti di $r$ , *diversi dall'origine. Dobbiamo dimostrare che* il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa è sempre costante.

Punto di partenza: $P, Q \in r$

Per semplicità supponiamo $r\ nel\ I\ e\ IIIQ$, $P, Q \in IQ$




Siano $P', Q'$ le proiezioni di P e Q sull'asse delle ascisse.

I triangoli OPP' e OQQ' hanno gli angoli congruenti

**Teorema:** se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente congruenti, i lati corrispondenti (ovvero i lati opposti agli angoli congruenti) sono in proporzione.

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{QQ'}{OQ'} \qquad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Se avessimo un altro punto T $T(x_3, y_3) \in r$ nel terzo quadrante, si potrebbe dimostrare

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$$ Il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa è costante

Poiché non si è fatta alcuna ipotesi sui punti $P, Q, T \in r$ , se non quella di essere diversi dall'origine. Questa relazione vale per tutti i punti di *r*. Indichiamo con *m* la costante.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = m.$$

c.v.d.

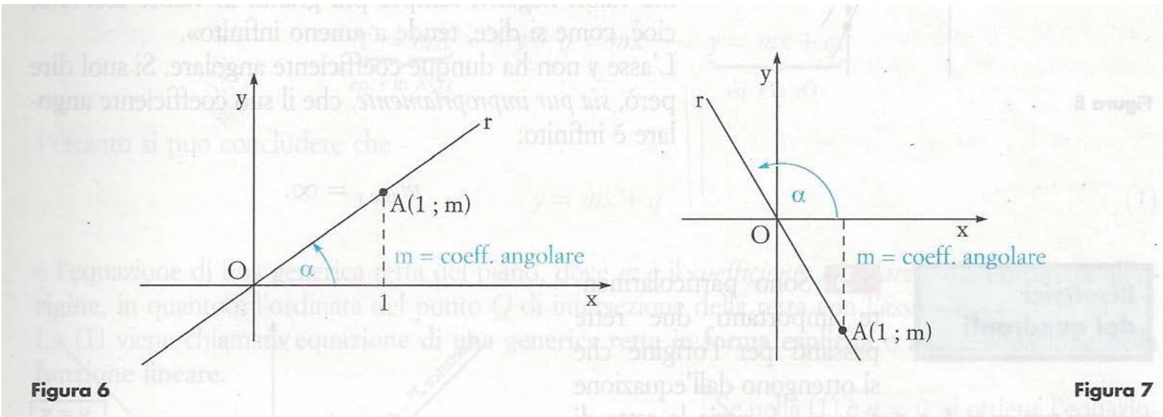
<u>Conclusione:</u> la retta *r* è il luogo dei punti del piano, esclusa l'origine, aventi ordinata proporzionale all'ascissa secondo un coefficiente opportuno. Sia m tale rapporto

$$\frac{y}{x} = m \qquad \text{valida } \forall x \neq 0$$

$y = mx$ valida $\forall x$ Equazione della proporzionalità diretta

## 2.1 Coefficiente angolare di una retta passante per l'origine

<u>è l'ordinata di un punto avente ascissa pari ad 1. Al variare di m varia la pendenza di m.</u>




DEFINIZIONE: per angolo formato da una retta r con l'asse delle ascisse s'intende l'angolo che il semiasse positivo delle ascisse descrive in senso antiorario per sovrapporsi alla retta r.

Un angolo è caratterizzato da due lati ed un vertice. Nel nostro caso
il vertice coincide con O,
il primo lato dell'angolo è l'asse delle ascisse,
il secondo lato dell'angolo è la retta *r*.

**Se A è il punto della retta r avente ascissa 1, in entrambi i disegni si ha che m è l'ordinata.**
**Se m>0 (primo disegno), angolo acuto, retta giace nel 1Q e 3Q.**

**Se m<0 (secondo disegno), angolo acuto, retta giace nel 2Q e 3Q.**

**Il coefficiente angolare di una retta è la tangente trigonometrica dell'angolo (acuto o ottuso), orientato in senso antiorario, che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.**

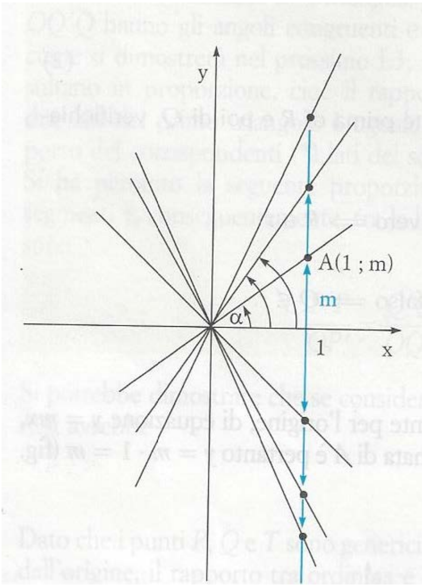
**Osservazione 1** y=mx se m=0 y=0 equazione dell'asse delle ascisse

**Osservazione 2** y=mx non potrà mai rappresentare l'asse y (la cui equaz è x=0)

infatti ricavo x: $m = \frac{y}{x}$ non ha senso per i punti dell'asse y

1° caso: angolo acuto che tende ad un angolo di 90° (per difetto) il coeff assume valori positivi sempre più grandi

2° caso: angolo ottuso che tende ad un angolo di 90°(per eccesso) il coeff assume valori negativi sempre più grandi in valore assoluto




l'asse y ha come coefficiente angolare infinito $m_{asse\ y} = \infty.$

l'asse x ha come coefficiente angolare m=0

**Esercizi:** ricavare l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse. Se $\boldsymbol{m = \frac{\sqrt{2}}{2} = tg\ \alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 35,26°}$$

$$\boldsymbol{\alpha\ è\ l'angolo\ (arco) la\ cui\ tangente\ è\ \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

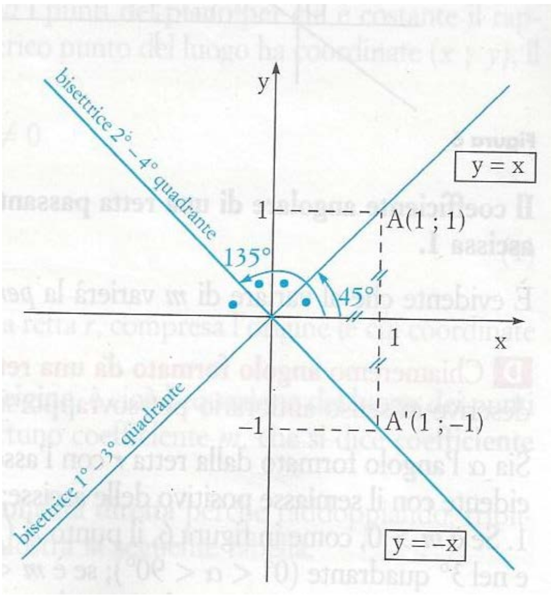
Domanda: Se si hanno angoli negativi?

Usare il goniometro

### 2.2 Bisettrici dei quadranti

*tra le rette, sono le più importanti*

y=x 45° y= - x 135°




## 3 Retta in posizione generica

Obiettivo: determinare l'equazione di una generica retta del piano, non passante per l'origine e non parallela ad alcuno degli assi cartesiani.

*Ogni retta in posizione generica, non parallela all'asse y ha come equazione $y = mx + q$ dove $m$ e $q$ sono due qualsiasi numeri reali.*

*Dimostrazione*

Dividiamo la dimostrazione in due parti

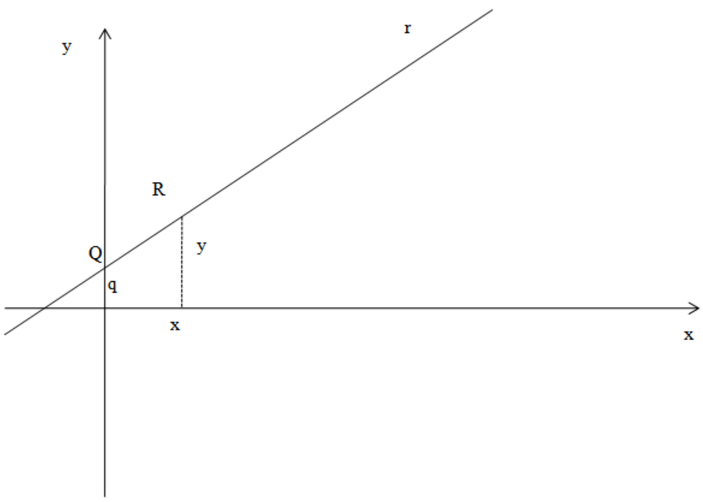
a. $\forall R \in r$ ha le coordinate che verificano la relazione $y_R = mx_R + q$

(tutti i punti di r hanno le coordinate che verificano questa relazione)

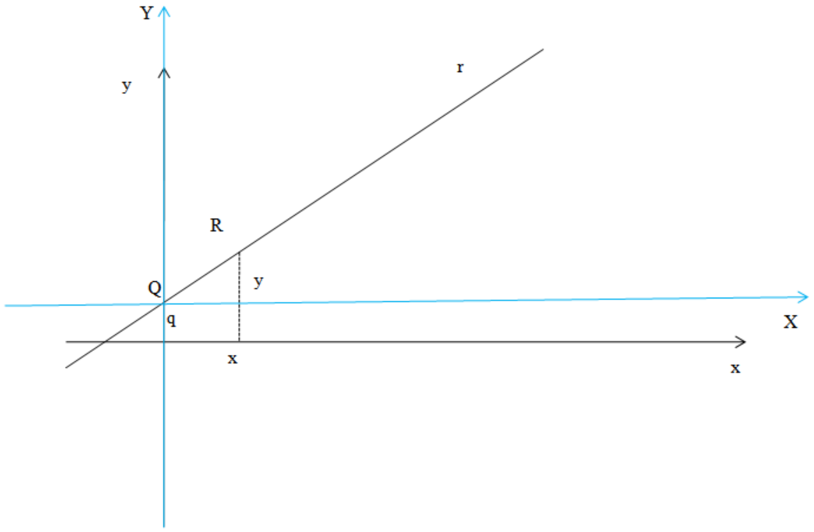
b. solo i punti P$\in r$ hanno le coordinate che verificano questa relazione.

Dimostrazione parte a

Considero Oxy, sia $r$ *non parallela* all'asse y. Sia $Q(0, q)$ il punto di intersezione con l'asse delle ordinate.




Considerata una traslazione del sist. di rif. che porta O in Q




nel nuovo sist di riferimento le coordinate di un punto generico R sono: $\begin{cases} X = x \\ Y = y - q \end{cases}$

Nel sistema QXY la retta r ha equazione Y$= mX$ , nel sistema Oxy diventa

$$y - q = mx$$

$$y = mx + q$$

c.v.d

Dimostrazione parte b

Supposto per assurdo che esista un punto $S(x_S, y_S)$ che soddisfa l'equazione

$$y_s = mx_s + q$$

con $S \notin r$

Posso sempre considerare un punto $Q$ diverso da S avente la stessa ascissa di S ma appartenente ad r

$$Q(x_S, y_Q)$$

Per la proprietà precedente $y_Q = mx_Q + q = mx_S + q = y_s$

Quindi $Q \equiv S$ contraddizione. Deriva dall'aver supposto $S \notin r$. Quindi $S \in r$ ed il teorema è dimostrato.

**Osservazioni**

$$y = mx + q$$

$m\ coeff\ angolare$ $q\ ordinata\ all'origine$

è la retta parallela a quella passante per l'origine di equazione $y = mx$

m>0 angolo acuto

m<0 angolo ottuso

m=0 retta parallela all'asse delle ascisse

non rappresenta una retta parallela all'asse delle ordinate

**Esercizio n.1** tracciare i grafici delle rette in posizione generica e stabilire se un punto appartiene o meno alla retta OK

**Esercizio n.2** scrivere l'equazione della retta note le coordinate di due punti: $A(-2,3) e\ B(1,-4)$

r) $y = mx + q$ incognite: m e q

$A(-2{,}3) \in r$ allora $y_A = mx_A + q$ $3 = -2m + q$

$B(1,-4) \in r$ allora $-4 = m + q$

$$\begin{cases} -2m + q = 3 \\ m + q = -4 \end{cases}$$

risolvo utilizzando il metodo di riduzione

$$\begin{cases} -2m + q = 3 \\ -m - q = 4 \end{cases}$$

$-3m = 7$ ricavo $m = -\frac{7}{3}$

$$\begin{cases} m = -\frac{7}{3} \\ q = -4 - m \end{cases} \qquad \begin{cases} m = -\frac{7}{3} \\ q = -4 + \frac{7}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Soluzione: $r)\ y = -\frac{7}{3}x - \frac{5}{3}$

**Per casa:** Trovare l'equazione della retta passante per $\mathrm{A}(1,-4)\ e\ B(3,-2)$. Sol y=x-5

## 4 Rette parallele

*Due rette, non parallele all'asse delle ordinate, sono parallele se e solo se hanno uguale coefficiente angolare*

$$s \| t \iff m_s = m_t$$

Dimostrazione

parte a. Se *s e t sono due rette parallele* $s \| t$ *allora* $m_s = m_t$

parte b. Se *s e t sono due rette t.c.* $m_s = m_t$ *allora* $s \| t$

Dimostrazione parte a

Se s e t sono due rette non parallele all'asse delle ordinate, tali che s||t

Supposto che nel piano Oxy le due rette abbiano equazioni

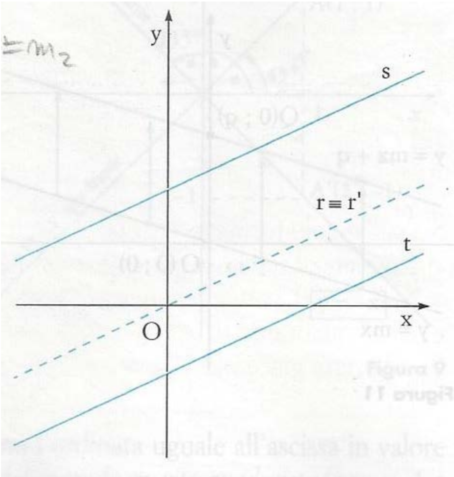
s) $y = m_1 x + q_1$

t) $y = m_2 x + q_2$

Per il teorema precedente,

la retta r uscente dall'origine e parallela ad s avrà equazione $y = m_1 x$

la retta r' uscente dall'origine e parallela a t avrà equazione $y = m_2 x$




Abbiamo supposto che s e t siano parallele, quindi $r \equiv r'$ in quanto la retta passante per O e parallela a due rette parallele è unica

quindi $m_1 = m_2$ c.v.d.

Dimostrazione parte b.

Siano *s e t sono due rette t.c.* $m_1 = m_2$

s) $y = m_1 x + q_1$

t) $y = m_2 x + q_2$

Considerando le due rette $y = m_1 x$ ed $y = m_2 x$ passanti per O e di ugual coefficiente angolare, esse devono coincidere ( $r \equiv r'$ ) quindi le rette

s) $y = m_1 x + q_1$ t) $y = m_2 x + q_2$

aventi la stessa direzione delle precedenti, risultano parallele ad una stessa retta, quindi parallele tra loro (propr.transit) c.v.d.

## 5 Rette perpendicolari

*Due rette, non parallele agli assi, sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1*

$$r \perp r' \Leftrightarrow m\, m' = -1$$

Dimostrazione

parte a. Se *r ed r' sono due rette perpendicolari* $r \perp r'$ *allora* $m\, m' = -1$

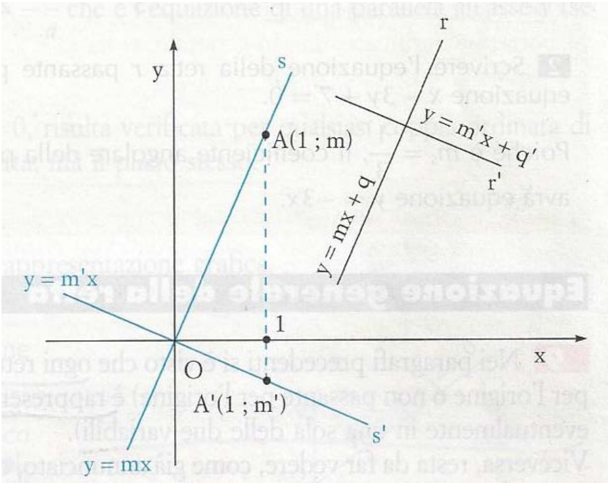
parte b. Se *s e t sono due rette t.c.* $m\, m' = -1$ *allora* $r \perp r'$

Dimostrazione parte a

Siano *r ed r' due rette non parallele agli assi, tra loro perpendicolari* $r \perp r'$

r) $y = mx + q$

r') $y = m'x + q'$




Possiamo riferirci alle rette s ed s' passanti per l'origine degli assi cartesiani, parallele rispettivamente ad r ed r'.

La condizione di perpendicolarità tra r ed r' (per la proprietà transitiva) viene conservata anche tra s ed s'

s) $y = mx$

s') $y = m'x$

Considero due punti A ed A' di s ed s' di ascissa 1, l'ordinata di tali punti rappresenta il coefficiente angolare, di s ed s' (segue dal significato del coefficiente angolare)

$$A(1; m) \quad A'(1, m')$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo A'OA, rettangolo in O (le due rette sono perpendicolari), si ha:

$$\overline{AA'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA'}^2$$

ma $\overline{AA'} = |m - m'|$,

inoltre $\overline{OA} = \sqrt{1 + m^2}$

$\overline{OA'} = \sqrt{1 + m'^2}$

la relazione diviene

$$|m - m'|^2 = (1 + m^2) + (1 + m'^2)$$

$$m^2 - 2mm' + m'^2 = 2 + m^2 + m'^2$$

eliminando i termini simili resta

$$m\, m' = -1$$

c.v.d.

Se una delle due rette è parallela all'asse $x$, l'altra risulta parallela all'asse $y$; la prima avrà dunque coefficiente angolare nullo (come l'asse $x$), ma per la seconda non è possibile definire il coefficiente angolare ($m = \infty$).

Esempi:

**1** Consideriamo le rette

$r)\ y = 2x + 1 \qquad s)\ 2x + 4y - 5 = 0.$

La prima retta ha coefficiente angolare $m_r = 2$.
L'equazione di $s$ può essere scritta nella forma $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ e quindi è $m_s = -\frac{1}{2}$.

Essendo $m_r \cdot m_s = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, le due rette $r$ e $s$ sono perpendicolari.

Analogamente, le rette

$t)\ 2x - 3y = 4 \qquad u)\ 3x + 2y + \sqrt{5} = 0$

sono perpendicolari in quanto $m_t = \frac{2}{3}$, $m_u = -\frac{3}{2}$ e risulta $m_t \cdot m_u = -1$.

**2** Scrivere l'equazione della retta $r$ passante per l'origine e perpendicolare alla retta $s$ di equazione $x - 3y + 7 = 0$.

Poiché è $m_s = \frac{1}{3}$, il coefficiente angolare della perpendicolare richiesta è $m_r = -3$ e quindi $r$ avrà equazione $y = -3x$.

Per casa: esercizi pag. 57 n. 24, 26, 27

## 6 Equazione generale della retta

Si è mostrato che ogni retta nel piano cartesiano è rappresentata da un'equazione di primo grado in x e y (o eventualmente solo in una variabile)

Viceversa: dimostriamo che la più generale equazione di primo grado in due variabili

$ax + by + c = 0$ rappresenta una qualsiasi retta del piano, al variare di $a, b, c \in R$

Equazione cartesiana o equazione in forma implicita

1) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$

In questo caso l'equazione (1) è completa e può essere risolta rispetto a $y$ essendo $b \neq 0$:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \qquad (2)$$

La (2) è l'equazione di una retta di **coefficiente angolare**

$$\boxed{m = -\frac{a}{b}}$$

e di **ordinata all'origine**

$$\boxed{q = -\frac{c}{b}}$$

rappresenta una retta non parallela ad alcuno degli assi cartesiani e non passante per l'origine

**2)** $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c = 0$

L'equazione (1) assume la forma $ax + by = 0$, ossia $y = -\frac{a}{b}x$, che è l'equazione di una retta per l'origine, di coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b}$, e non coincidente con nessuno dei due assi, essendo in questo caso $m$ determinato e diverso da zero.

**3)** $a = 0 \wedge b \neq 0$ (con $c$ qualsiasi)

La (1) diventa $by + c = 0$, ossia $y = -\frac{c}{b}$, che è l'equazione di una parallela all'asse $x$ (se $c = 0$ è l'equazione dell'asse $x$ stesso).

**4)** $a \neq 0 \wedge b = 0$ (con $c$ qualsiasi)

L'equazione (1) diventa $ax + c = 0$, cioè $x = -\frac{c}{a}$ che è l'equazione di una parallela all'asse $y$ (se $c = 0$ è l'equazione dell'asse $y$ stesso).

**5)** $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$

L'equazione (1), riducendosi all'identità $0 = 0$, risulta verificata per qualsiasi coppia ordinata di numeri reali; essa non rappresenta alcuna retta, ma il piano stesso.

**6)** $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0$

L'equazione (1) non ha soluzioni e non ha rappresentazione grafica.

Esercizi: disegnare una retta in forma implicita: trovare le intersezioni con gli assi cartesiani

Tracciare il grafico della retta di equazione $3x - 4y + 12 = 0$.
Volendo, possiamo, nell'equazione data, ricavare $y$ in funzione di $x$ e costruire il grafico mediante l'aiuto di una tabella; invece qui calcoleremo le due intersezioni della retta con gli assi coordinati e la determinazione di questi due punti sarà sufficiente per tracciare il grafico richiesto (fig. 15).

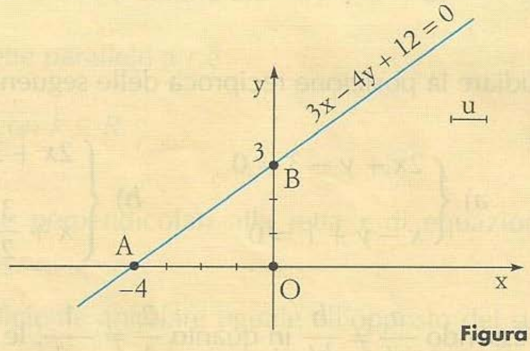


**Figura 15**

Intersezione con l'asse $x$:

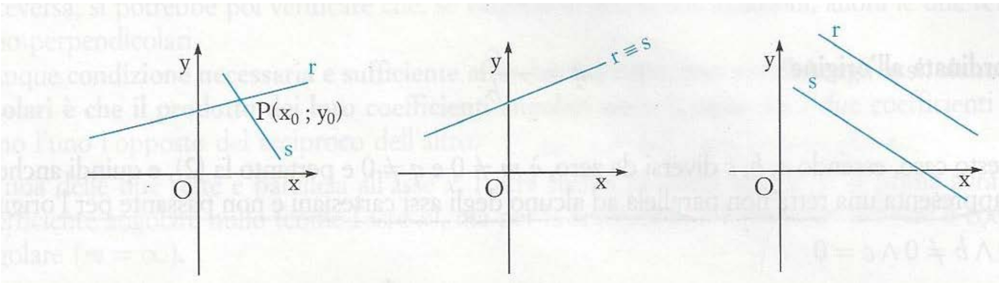
$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x - 4y + 12 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -4 \end{cases} \longrightarrow A(-4\,;\,0)$$

Intersezione con l'asse $y$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4y + 12 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \longrightarrow B(0\,;\,3).$$

## 7 Posizione reciproca di due rette

nel piano (non necessariamente cartesiano)




rette incidenti rette coincidenti rette parallele

Da un punto di vista analitico

il sistema formato dalle due equazioni delle rette $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ è

determinato indeterminato impossibile

P unico punto di intersezione infiniti punti di intersez nessun punto di inters

Teorema (segue dalla teoria dei sist lineari)

$$r \text{ e } s \text{ incidenti} \iff \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \qquad (a',\ b' \neq 0)$$

$$r \text{ e } s \text{ coincidenti} \iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad (a',\ b',\ c' \neq 0)$$

$$r \text{ e } s \text{ parallele e distinte} \iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \qquad (a',\ b',\ c' \neq 0)$$

**Esercizi:** studiare la posizione reciproca delle rette senza risolvere il sistema !

Suggerimento: riportare le rette nella forma implicita e calcolare i rapporti

Studiare la posizione reciproca delle seguenti coppie di rette:

$a)\ \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x+3y-2=0 \\ x+\frac{3}{2}y-1=0 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 4x+2y-\sqrt{13}=0. \end{cases}$

a) Essendo $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ in quanto $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$, le rette rappresentate dalle due equazioni del sistema sono incidenti e il sistema è determinato.
Risolvendo il sistema con uno qualsiasi dei metodi noti, si ottiene $x=\frac{2}{3} \wedge y=\frac{5}{3}$ e quindi il punto di intersezione tra le due rette è $P\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.
b) In questo caso è $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=2$; le rette sono quindi coincidenti e hanno infiniti punti in comune (il sistema è indeterminato, come risulta evidente se si osserva che moltiplicando per 2 entambi i membri della seconda equazione si ottiene la prima).

c) Risulta $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{1}{2} \neq \frac{c}{c'}$ e quindi le rette sono parallele e non hanno alcun punto in comune: il sistema risulta impossibile, come è evidente se lo si scrive nella forma

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+y=\frac{\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Esercizi: da fare senza risolvere il sistema: pag 58 n 30, 32.

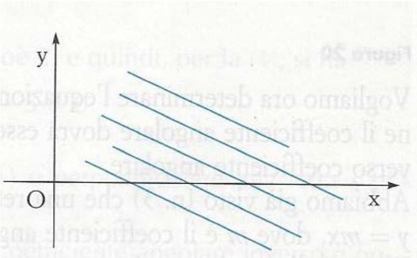
## 7.1 Fascio improprio di rette

Definizione (indipendente dal piano cartesiano):

| |
|---|
| *l'insieme di tutte le rette di un piano aventi la medesima direzione (ossia che sono tra loro parallele) viene detto **fascio improprio di rette*** |

In Geometria Analitica è rappresentato dall'equazione $y = mx + k$

al variare di $k \in R$ si ottengono infinite rette




m fisso k (ordinata all'origine) variabile

Per k=0 si ottiene $y = mx$ retta base del fascio

Questo fascio non rappresenta il fascio delle rette parallele all'asse y: non esiste il coefff. angolare

il fascio delle rette parallele all'asse y è rappresentato da $x = h \quad con\ h \in R$

**Esempi:**

**1** Scrivere l'equazione del fascio improprio di rette, inclinate di 45° sull'asse $x$.

Poiché le rette che formano con l'asse $x$ un angolo di 45° hanno coefficiente angolare $m = 1$ (rette parallele alla bisettrice del 1°-3° quadrante), il fascio richiesto ha equazione $y = x + k$, con $k \in R$.

**2** Scrivere l'equazione delle rette parallele alla retta $r$ di equazione $2x - 3y + 5 = 0$.

Poiché $m_r = -\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, l'equazione delle infinite rette parallele a $r$ è

$$y = \frac{2}{3}x + k \qquad \text{con } k \in R.$$

**3** Scrivere l'equazione del fascio improprio delle perpendicolari alla retta $r$ di equazione $y = 2x + 5$.

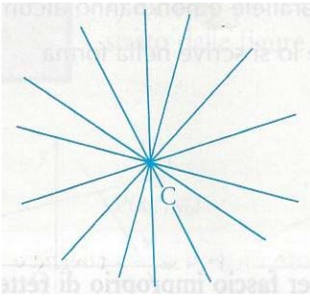
Poiché $m_r = 2$, le perpendicolari a $r$ avranno coefficiente angolare uguale all'opposto del suo inverso, cioè $-\frac{1}{2}$: l'equazione richiesta è

$$y = -\frac{1}{2}x + k \qquad \text{con } k \in R.$$

Esercizi pag. 59 dal n. 44 al n. 47

## 7.2 Fascio proprio di rette

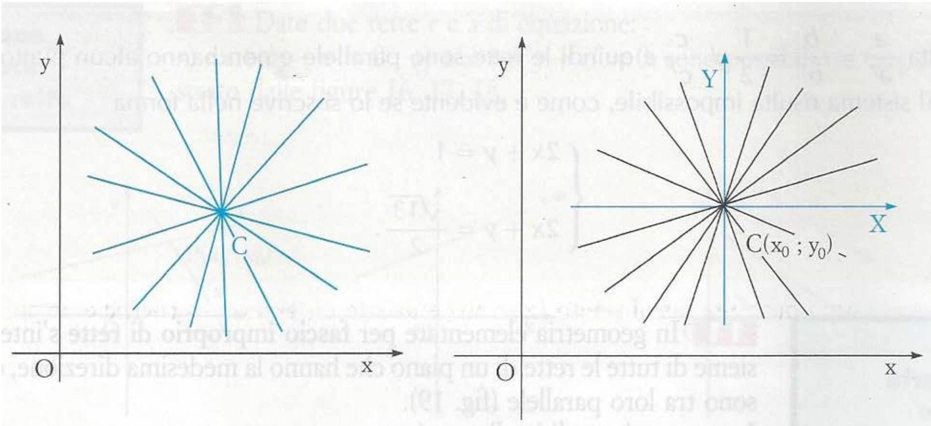
*Definizione: l'insieme di tutte le rette del piano che passano per uno stesso punto (detto centro del fascio) verrà detto* ***fascio proprio di rette***




*Teorema* In geometria analitica, un fascio proprio di rette di centro $C(x_0, y_0)$, ha equazione

$y - y_0 = m(x - x_0)$ m variabile

con esclusione di quella parallela all'asse y per la quale non è definito il coefficiente angolare, la cui equazione è $x = x_0$




**Osservazione** m è variabile, le rette del fascio hanno ciascuna un diverso coefficiente angolare

**Dimostrazione**

Sia $C(x_0, y_0)$ un punto nel piano cartesiano

$y - y_0 = m(x - x_0)$

Cominciamo con l'osservare che

$$y = mx$$

è il fascio proprio di rette passanti per l'origine degli assi, con esclusione dell'asse delle ordinate (segue dal fatto che una retta passante per l'origine (esclusa l'asse delle ordinate) è rappresentata dall'equazione dove m è variabile in R).

Considerato un fascio di rette per C

Tramite una traslazione degli assi che porti l'origine in C, l'equazione del fascio di rette nel sistema $XCY$ è $Y = mX$

ricavo l'equazione nel sistema Oxy:

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0, \end{cases}$$

si ha

$$\underbrace{Y = mX}_{\text{eq. fascio in } XCY} \longrightarrow \underbrace{y - y_0 = m(x - x_0)}_{\text{eq. fascio in } xOy}.$$

c.v.d.

**Esempio:** per rappresentare tutte le rette del fascio di centro $P(-3, 8)$

scriviamo prima quella parallela all'asse y passante per P: avrà equazione $x = -3$

scriviamo il fascio di rette

$P(-3, 8)$

$f) \quad y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 8 = m(x + 3)$ esplicitiamo rispetto ad y

$f)\ y = mx + 3m + 8$ equazione del fascio

**Esempio**

Supponiamo di voler rappresentare *tutte* le rette del fascio di centro $P(1\ ;\ -3)$.
La retta per $P$, parallela all'asse $y$, ha equazione $x = 1$ e non si può ottenere dall'equazione (1).
Applicando la (1), si ha $y - (-3) = m(x - 1)$ cioè $y = mx - m - 3$; quindi il fascio in esame è rappresentato da $y = mx - m - 3 \quad \vee \quad x = 1$.

**Esercizi** pag. 59 dal n. 48 al n. 51

## 8 Equazione della retta passante per un punto e con un assegnato coefficiente angolare

Sia $C(x_0, y_0)$ un punto nel piano cartesiano,

la retta passante per un punto C con assegnato coefficiente angolare è data da

$y - y_0 = m(x - x_0)$

Esempi:

**1** Scrivere l'equazione della retta $r$ passante per $P(2\ ;\ -1)$ e parallela alla retta $s$ di equazione $y = 2x + 1$.

La retta $r$ richiesta avrà lo stesso coefficiente angolare di $s$, cioè 2, e quindi, per la (1), si ha

$$y - (-1) = 2 \cdot (x - 2) \longrightarrow 2x - y - 5 = 0.$$

**2** Scrivere l'equazione della retta $r$ passante per $A(-3\ ;\ 1)$ e perpendicolare alla retta $s$ di equazione $2x - 3y + 1 = 0$.

La retta $s$ ha coefficiente angolare $\frac{2}{3}$ e quindi la retta $r$ avrà coefficiente angolare inverso e opposto, cioè $-\frac{3}{2}$; applicando la (1), l'equazione di $r$ risulta

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x + 3) \longrightarrow 3x + 2y + 7 = 0.$$

Esercizi pag. 60 n. 53, 55, 57, 59, 61, 62, 63

## 9 Coefficiente angolare della retta passante per due punti

**14** Consideriamo due punti $P(x_1\ ;\ y_1)$ $Q(x_2\ ;\ y_2)$

tali che la retta $PQ$ non sia parallela all'asse $y$: sia cioè $x_1 \neq x_2$. Per quanto visto nel precedente paragrafo, l'equazione del fascio di rette di centro $P(x_1\ ;\ y_1)$ è

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (1)$$

Imponendo che la generica retta di questo fascio passi per $Q$, ossia che le coordinate di $Q$ soddisfino la (1), si ottiene

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

cioè, avendo supposto $x_1 \neq x_2$,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

Pertanto: **il coefficiente angolare della retta, non parallela all'asse $y$, passante per due punti dati si ottiene come rapporto tra la differenza delle ordinate dei due punti e la differenza delle corrispondenti ascisse.**

Osservazioni: P e Q sono intercambiabili

possiamo trovare m senza determinare la retta

Ad esempio il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(-2\ ;\ 3)$ e $B(5\ ;\ -1)$ è, in base alla (2),

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-3}{5-(-2)} = -\frac{4}{7}.$$

Esercizi p. 61 n. 68, 70, 71, 79

### 9.1 Asse di un segmento

Dato un segmento AB, la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio si dice **asse del segmento.**

Obiettivo: trovare l'equazione dell'asse di un segmento

Applicando questa definizione si può scrivere l'equazione dell'asse di un segmento $AB$ di cui si conoscono gli estremi: $A(x_A\ ;\ y_A)$ e $B(x_B\ ;\ y_B)$.
Occorre procedere come segue:

1°) si calcolano le coordinate del punto medio $M$ di $AB$ e cioè $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$;

2°) si calcola il coefficiente angolare della retta $AB$ e cioè $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;

3°) si determina il coefficiente angolare dell'asse, che è perpendicolare ad $AB$, e cioè $m_{asse} = -\dfrac{1}{m_{AB}}$;

4°) si scrive l'equazione della retta passante per $M$ e con coefficiente angolare $m_{asse}$, ottenendo

$$y - y_M = m_{asse}(x - x_M).$$

L'ultima equazione scritta è l'equazione richiesta dell'asse di $AB$.

Scrivere l'equazione dell'asse del segmento avente per estremi $A(-1\ ;\ 2)$ e $B\left(2\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ (fig. 22).

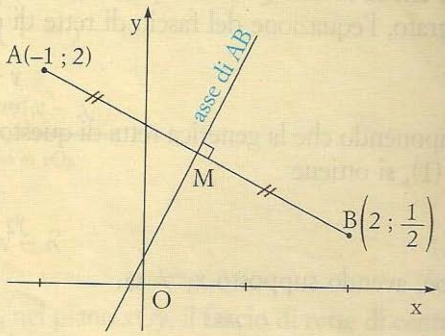



Figura 22

Determiniamo il punto medio di $AB$: $M\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{4}\right)$.

Il coefficiente angolare di $AB$ è

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - 1/2}{-1-2} = -\frac{1}{2}.$$

Il coefficiente angolare dell'asse di $AB$ è quindi $m = -\dfrac{1}{m_{AB}} = 2$.

La retta per $M$ con coefficiente angolare 2 è l'asse richiesto:

$$y - \frac{5}{4} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \longrightarrow 8x - 4y + 1 = 0.$$

Eserc pag. 62 n. 77, 78, 79, 80

## 10 Equazione della retta passante per due punti

Siano $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ due punti distinti, dimostriamo che l'equazione della retta passante per P e Q non parallela ad alcun asse cartesiano è:

$$\frac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \frac{x - x_P}{x_Q - x_P}$$

dimostrazione

Consideriamo $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ due punti distinti

$P \in r$

$r_P)\quad y - y_P = m(x - x_P) \qquad (1)$

$Q \in r_P \qquad y_Q - y_P = m(x_Q - x_P)$

ricavo $m$

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

sostituisco m nell'equaz (1)

$$y - y_P = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_P)$$

da cui, dividendo per $y_Q - y_P$

$$\frac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \frac{x - x_P}{x_Q - x_P}$$

cvd

Esempi:

**1** Scrivere l'equazione della retta passante per $A(2\ ;\ -3)$ e $B(-1\ ;\ 4)$.

Applicando la (1) si ha

$$\frac{y+3}{4+3} = \frac{x-2}{-1-2} \longrightarrow \frac{y+3}{7} = -\frac{x-2}{3} \longrightarrow 7x+3y-5=0.$$

**2** Verificare che i punti $A(0\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 4)$, $C(1\ ;\ 2)$ sono allineati.

Applicando la (2), avremo: $\dfrac{2-1}{4-1} = \dfrac{1-0}{3-0} \longrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$; è quindi verificata la condizione di allineamento.

Esercizi: pag 63 dal n. 84 al n. 86, pagl 64 n. 88, 89, 90, 92, 93

## 11 Distanza di un punto da una retta

**18** Si voglia calcolare la distanza $d$ del punto $P(x_0\ ;\ y_0)$ dalla retta $r$ di equazione $ax+by+c=0$.

Per calcolare tale distanza si scrive l'equazione della retta $s$ che passa per $P$ ed è perpendicolare a $r$ (fig. 24) e, successivamente, si determina il punto $H$ di intersezione tra $r$ e $s$. La distanza $d$ dal punto $P$ alla retta $r$ non è altro che la distanza tra i punti $P$ e $H$. Si può quindi procedere con il metodo ora proposto ottenendo, con calcoli un po' laboriosi, la seguente formula:

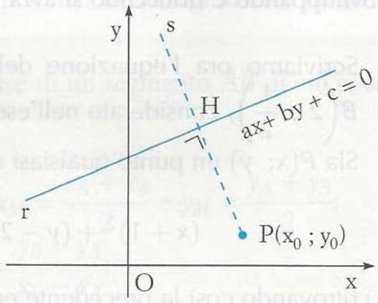


**Figura 24**

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (1)$$

La formula (1) si interpreta nel seguente modo: *la distanza di un punto da una retta di equazione* $ax+by+c=0$ *si ottiene sostituendo nel primo membro dell'equazione della retta al posto di x e y le coordinate* $x_0$ *e* $y_0$ *del punto e dividendo il valore assoluto del risultato ottenuto per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti di x e di y nell'equazione stessa.*

La distanza del punto $P(-5\ ;\ -1)$ dalla retta di equazione $2x-3y+1=0$ si ottiene applicando la (1) e quindi si ha

$$d = \frac{|2(-5)-3(-1)+1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-6|}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Esercizi pag. 65 n. 97, 98, 101, pag 66 n. 102, 105, 106

## 12 Applicazioni, complementi

punti notevoli di un triangolo

Applicazioni: nel calcolo delle aree di triangoli e quadrilateri

Equazioni delle bisettrici degli angoli formati da due rette

Esercizio guidato pag. 67