Esercizi risolti su Equazioni e disequazioni esponenziali che si risolvono con i log

esempio n° 1

$$2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-3}$$

$$\log_2 2^{x+3} = \log_2 (64 \cdot 3^{x-3})$$

$$x+3 = \log_2 64 + \log_2 3^{x-3}$$

$$x+3 = \log_2 2^6 + (x-3) \cdot \log_2 3$$

$$x+3 = 6 \cdot 1 + x \log_2 3 - 3 \cdot \log_2 3$$

$$x - x \log_2 3 = 6 - 3 - 3 \cdot \log_2 3$$

$$(1 - \log_2 3)x = 3 - 3 \log_2 3$$

$$x = \frac{3\cancel{(1-\log_2 3)}}{\cancel{1-\log_2 3}} = 3$$

esempio n° 2

$$15 + 4^x = 2^{x+3}$$ ho solo potenze di 2^x

$$15 + 2^{2x} = 2^x \cdot 2^3$$

$$2^{2x} - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0$$ $y = 2^x$

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

$y = 3$ e $y = 5$

$2^x = 3$ e $2^x = 5$

$\log_2 2^x = \log_2 3$ e $\log_2 2^x = \log_2 5$

$x = \log_2 3$ e $x = \log_2 5$

esempio n° 3

$$\frac{2}{3^{2-x}} - 2\cdot 5^{1+x} = 5^x - \frac{3}{3^{1-x}}$$ si hanno potenze di 3 e 5

$$\frac{2}{3^2\cdot 3^{-x}} - 2\cdot 5\cdot 5^x = 5^x - \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{3}\cdot 3^{-x}}$$

$$\frac{2}{9}\cdot 3^x - 10\cdot 5^x = 5^x - 3^x$$

separo i termini che contengono 3^x e 5^x sommando i termini simili.

$$\left(\frac{2}{9}+1\right)3^x = 11\cdot 5^x$$

$$\frac{\cancel{11}}{9}\cdot 3^x = \cancel{11}\cdot 5^x$$ mi riconduco alla forma canonica

$$3^{x-2} = 5^x$$ → passo ai logaritmi.

$$\log_3 3^{x-2} = \log_3 5^x$$

$$x-2 = x\cdot\log_3 5$$

$$(1-\log_3 5)\,x = 2$$

$$x = \frac{2}{1-\log_3 5}$$

Esempio n.4

$$3^{x-1} = 7^{1+x}$$
$$\log_3 3^{x-1} = \log_3 7^{1+x}$$
$$x-1 = (1+x)\log_3 7$$
$$x = 1+\log_3 7 + x\log_3 7$$
$$x - x\log_3 7 = 1+\log_3 7$$
$$(1-\log_3 7)x = 1+\log_3 7$$
$$x = \frac{1+\log_3 7}{1-\log_3 7}$$

$$3^{x-1} > 7^{1+x}$$
$$\log_3 3^{x-1} > \log_3 7^{1+x}$$
$$x-1 > (1+x)\log_3 7$$
$$x > 1+\log_3 7 + x\log_3 7$$
$$(1-\log_3 7)x > 1+\log_3 7$$
$$x < \frac{1+\log_3 7}{1-\log_3 7}$$

esempio n° 1 $\quad 5^x < 20 \quad$ disequaz. in forma canonica

$$\log_5 5^x < \log_5 20$$

$$x < \log_5 5 \cdot 4$$

$$x < \log_5 5 + \log_5 4$$

$$x < 1 + \log_5 4$$

le soluzioni sono $S = (-\infty, 1 + \log_5 4)$ <u>intervallo</u>

esempio n° 2

$$2^x < 4 \cdot 3^x$$

base 2, base 3

$$\log_2 2^x < \log_2 (4 \cdot 3^x)$$

$$x < \log_2 4 + \log_2 3^x$$

$$\underline{x} < 2 + \underline{x} \cdot \log_2 3$$

$$(1 - \log_2 3)\, x < 2$$

attenzione: $(1 - \log_2 3) \overset{?}{>} 0$

$$\boxed{x > \frac{2}{1 - \log_2 3}}$$

cambio il verso

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{1{,}09}{0{,}69} = 1{,}58$$

$$1 - \log_2 3 = -0{,}58$$

Esempio n. 4 pag. 62 (libro K)

$$\log_2 x + 3\log_4 x = 10$$

$$D: x > 0$$

per_risolvere:

se_hanno_basi_differenti

occorre_ricondursi_alla

stessa_base

$$\log_2 x = \frac{\log_4 x}{\log_4 2} = \frac{\log_4 x}{\frac{1}{2}} = 2\log_4 x$$

l'eq._diventa

$$2\log_4 x + 3\log_4 x = 10$$

$$5\log_4 x = 10$$

$$\log_4 x = 2$$

$$x = 2$$

soluzione_accettabile

esempio n° 3

$$2^x + 5\cdot 3^x > 2^{x+1}$$ potenze di 2^x e 3^x

$$2^x - 2^{x+1} > -5\cdot 3^x$$ mi riconduco alla forma canonica

$$2^x - 2^x\cdot 2 > -5\cdot 3^x$$

$$2^x(1-2) > -5\cdot 3^x$$

$$-2^x > -5\cdot 3^x$$

$$2^x < 5\cdot 3^x$$

$$\log_2 2^x < \log_2 5\cdot 3^x$$

$$x < \log_2 5 + x\log_2 3 \rightarrow x(1-\log_2 3) < \log_2 5$$

attenzione: $1-\log_2 3 = -0{,}58 < 0$

$$x > \frac{\log_2 5}{1-\log_2 3}$$

esempio n° 4

$$3^{2x+1} - 3^{2+x} + 6 \le 0$$ Tutte e sole potenze di 3

$$3^{2x}\cdot 3 - 3^2\cdot 3^x + 6 \le 0$$

$$\cancel{3}\cdot 3^{2x} - \overset{3}{\cancel{9}}\cdot 3^x + \overset{2}{\cancel{6}} \le 0$$

$$3^{2x} - 3\cdot 3^x + 2 \le 0$$

$$y = 3^x$$

$$y^2 - 3y + 2 \le 0$$

$$\Delta = 9-8 = 1$$

$$y = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

la diseq. è risolta per valori interni

$$1 \le y \le 2$$

$$1 \le 3^x \le 2$$

$$\overset{0}{\cancel{\log_3 1}} \le \log_3 3^x \le \log_3 2$$

$$0 \le x \le \log_3 2$$

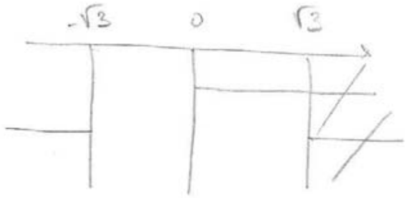
Equazioni e disequazioni logaritmiche

Esempio n° 1

$$\log(x^2+3) - 2\log x - \log 2 = \log 4 - \log(x^2-3)$$

Dominio:

$$\begin{cases} x^2+3>0 \\ x>0 \\ x^2-3>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \\ x>0 \\ x<-\sqrt{3} \;\vee\; x>\sqrt{3} \end{cases}$$



$x > \sqrt{3}$

Dominio: $x > \sqrt{3}$

$(\sqrt{3}, +\infty)$

Soluzione.

$$\log(x^2+3) - \log x^2 - \log 2 = \log 4 - \log(x^2-3)$$

$$\log\frac{(x^2+3)}{2x^2} = \log\frac{4}{x^2-3}$$

a parità di base, vale la stessa relazione tra gli argomenti

$$\frac{x^2+3}{2x^2} = \frac{4}{x^2-3} \qquad \text{equazione frazionaria}$$

$$(x^2-3)(x^2+3) = 8x^2$$

$$x^4 - 9 = 8x^2$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = y$$

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

$y = 9$ e $y = -1$

$x^2 = 9$ $\qquad$ $x^2 = -1$ N.S.

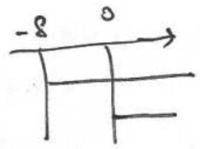
$x = \pm 3$ $\qquad$ $x = -3$ non accettabile. $\boxed{x = 3}$

Esempio

$$\log_a (x+8) = 2\log_a 3 - \log_a x \qquad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Dominio

$$\begin{cases} x+8>0 \\ x>0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x>-8 \\ x>0 \end{cases}$$

$\boxed{x>0}$

$D: \quad x>0$

Risolvo:

$$\log_a (x+8) = \log_a 3^2 - \log_a x$$

$$\log_a (x+8) = \log_a \frac{9}{x}$$

$$x+8 = \frac{9}{x}$$

$$x^2+8x = 9$$

$$x^2+8x-9=0$$

$x=1$

$x=-9$ non accettabile.

Soluzione: $\boxed{x=1}$

Verifica:

$$\log_a (x+8) = 2\log_a 3 - \log_a x$$

$$\log_a 9 \overset{?}{=} 2\cdot\log_a 3 - \cancel{\log_a 1}^{\,0}$$

$$\log_a 9 = \log_a 9 \qquad \text{sì!}$$

Esempio n. 2 pag. 61 (libro K)

$$\log_3(2x+4)=2$$
$$D: 2x+4>0$$
$$x>-2$$
$$risolvo: uso\_la\_def\_di\_\log$$
$$3^2=2x+4$$
$$x=\frac{5}{2}$$
$$verifica$$
$$\log_3(5+4)=2$$
$$\log_3(9)=2$$
$$OK$$

Esempio n. 3 pag. 61 (libro K)

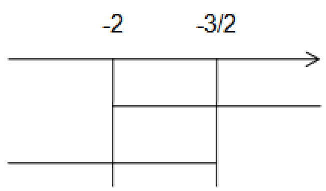
$$\log_2(x-2)+\log_2 x=\log_2(9-2x)$$
$$D: \begin{cases} x-2>0 \\ x>0 \\ 9-2x>0 \end{cases}$$
$$D: 2<x<\frac{9}{2}$$
$$risolvo:$$
$$\log_2(x-2)+\log_2 x=\log_2(9-2x)$$
$$hanno\_la\_stessa\_base: obiettivo$$
$$\log_2 f(x)=\log_2 g(x)$$
$$quindi$$
$$\log_2(x-2)x=\log_2(9-2x)$$
$$(x-2)x=(9-2x)$$
$$x=-3 \wedge x=3$$
$$Soluzione\_accettabile: solo\_x=3$$

Esempio (equazione)

$$\log_3(2x+4)=0$$
$$D: 2x+4>0$$
$$x>-2$$
$$risolvo\_usando\_def\_\log$$
$$3^0=2x+4$$
$$1=2x+4$$
$$-3=2x$$
$$x=-\frac{3}{2}$$
$$è\_una\_soluzione\_accettabile?$$
$$-\frac{3}{2}>?-2$$
$$-3>?-4$$
$$si$$

Esempio (disequazione)

$$\log_3(2x+4)<0$$
$$D: 2x+4>0$$
$$x>-2$$
$$risolvo\_prima\_cerco\_forma\_canonica$$
$$\log_3(2x+4)<\log_3 1$$
$$base>1$$
$$2x+4<1$$
$$x<-\frac{3}{2}$$
$$Soluz$$
$$\begin{cases} x>-2 \\ x<-\frac{3}{2} \end{cases}$$



$$-2<x<-3/2$$

Esempio

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+4) \le 0$$

$$D: x > -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+4) \le \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$base: 0 < b < 1$$

$$passo\_agli\_argomenti$$

$$2x+4 \ge 1$$

$$2x \ge -3$$

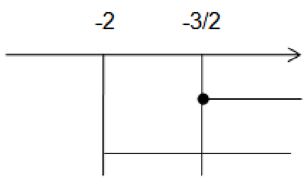
$$x \ge -\frac{3}{2}$$

$$soluz: sistema$$

$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2} \\ x > -2 \end{cases}$$

$$soluz$$

$$x \ge -\frac{3}{2}$$



Esempio

$$\log_{\frac{1}{3}}(2-x^2) \le 9$$

$$D: -2 < x < 2$$

$$ricondursi\_alla\_forma\_canonica$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2-x^2) \le 9 \cdot 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2-x^2) \le 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2-x^2) \le \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2-x^2) \le \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

$$base: 0 < b < 1$$

$$passo\_agli\_argomenti$$

$$2-x^2 \ge \frac{1}{9}$$

$$2-\frac{1}{9}-x^2 \ge 0$$

$$\frac{17}{9}-x^2 \ge 0$$

$$soluz$$

$$-\frac{\sqrt{17}}{3} < x < \frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$soluz: sistema$$

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ -\dfrac{\sqrt{17}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{17}}{3} \end{cases}$$

$$soluz: completare...$$