es. p. 41 n° 53

$$\begin{cases} 3^{2x} - 6\cdot 3^x - 27 \leq 0 \\ 2^{2x+1} + 2^x - 2^{x+3} - 4 \geq 0 \end{cases}$$

1ª D: $3^{2x} - 6\cdot 3^x - 27 \leq 0$ sia $y = 3^x$

$y^2 - 6y - 27 \leq 0$

$y = 9,\ y = -3$

$-3 \leq y \leq 9$

$-3 \leq 3^x \leq 9$

$-3 \leq 3^x \leq 3^2$

$$\begin{cases} -3 \leq 3^x \\ 3^x \leq 3^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \\ x \leq 2 \end{cases}$$ Soluz: $x \leq +2$

2ª Dis: $2^{2x+1} + 2^x - 2^{x+3} - 4 \geq 0$

$2^{2x}\cdot 2 + 2^x - 2^x\cdot 2^3 - 4 \geq 0$ sia $y = 2^x$

$2y^2 + y - 8\cdot y - 4 \geq 0$

$2y^2 - 7y - 4 \geq 0$

$y = 4,\ y = -\frac{1}{2}$

$y \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad y \geq 4$

$2^x \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad 2^x \geq 2^2$

N.S. $\vee$ $x \geq 2$

$x \geq 2$

Sistema: $$\begin{cases} x \leq +2 \\ x \geq 2 \end{cases}$$ risolto solo per $\boxed{x = 2}$

$\longrightarrow$

Verifica

$$\begin{cases} 3^{2\cdot 2} - 6\cdot 3^2 - 27 \overset{?}{\leq} 0 & \rightarrow \quad 3^4 - 6\cdot 9 - 27 \overset{?}{\leq} 0 \qquad 0 \leq 0 \quad \text{sì} \\ 2^{2\cdot 2+1} + 2^2 - 2^{2+3} - 4 \overset{?}{\geq} 0 & \qquad 0 \geq 0 \quad \text{sì} \end{cases}$$

Esercizio p. 39 n°40a Sistemi di diseq. frazionarie espon.

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{25}\right)^{-1}}{4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8} \geq 0 \\ 8 \cdot 3^x + 9 \geq 9^x \end{cases}$$

1ª dis. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{25}\right)^{-1}}{4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8} \geq 0$ $\begin{cases} N \geq 0 \\ D > 0 \end{cases}$

diseq. frazionaria.

$N \geq 0$ $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \geq 0$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \qquad \text{base} = \frac{2}{5} < 1$$

$$x \leq -2$$

$D > 0$

$$4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 > 0$$

$$(2^2)^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 > 0$$

$$2^{2x+2} - 33 \cdot 2^x + 8 > 0$$

$$2^{2x} \cdot 2^2 - 33 \cdot 2^x + 8 > 0$$

$$4 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 8 > 0 \qquad \text{sia } y = 2^x$$

$$4y^2 - 33y + 8 > 0$$

$$4y^2 - 33y + 8 = 0$$

$$y = 8, \quad y = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad y < \frac{1}{4} \vee y > 8$$

$y < \frac{1}{4} \lor y > 8$ ma $y = 2^x$

$2^x < \frac{1}{4} \lor 2^x > 8$

$2^x < 4^{-1} \lor 2^x > 2^3$

$2^x < 2^{-2} \lor 2^x > 2^3$

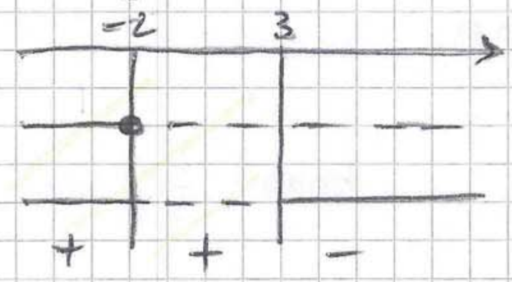
$D > 0: \quad x < -2 \lor x > 3$

Riassumendo:

$N \geq 0 \qquad x \leq -2$

$D > 0 \qquad x < -2 \lor x > 3$

Tabella dei segni della frazione:



Nella frazione iniziale, cercavo i valori ≥ 0

Devo però escludere $x=-2$ / $x < 3$ con $x \neq -2$

le soluz. della 1ª diseq frazionaria

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{25}\right)^{-1}}{4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8} \geq 0$$

sono: $\boxed{x < 3 \text{ con } x \neq -2}$

Il sist. è: $\begin{cases} x < 3 \\ 8 \cdot 3^x + 9 \geq 9^x \end{cases}$

ora studio la 2ª diseq: $8 \cdot 3^x + 9 - 9^x \geq 0$

$8 \cdot 3^x + 9 - 3^{2x} \geq 0$

$-3^{2x} + 8\cdot 3^{x} + 9 \geq 0$

$3^{2x} - 8\cdot 3^{x} - 9 \leq 0 \qquad y = 3^{x}$

$y^{2} - 8y - 9 \leq 0$

$y = 9,\ y = -1$ soluz. dell' eq. assoc.

$(y-5)(y+1) \geq 0$

le soluz. della diseq. sono: $-1 \leq y \leq 9$

ma $y = 3^{x}$

$-1 \leq 3^{x} \leq 9$

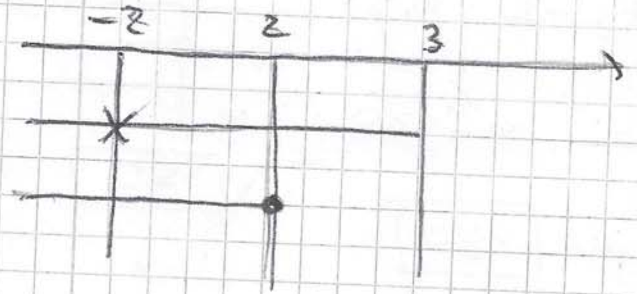
$\underbrace{-1 \leq 3^{x}}_{1^a\ d.} \leq 3^{2}$; $3^{x} \leq 3^{2}$: 2^a d.

$$\begin{cases} -1 \leq 3^{x} & \forall x \\ 3^{x} \leq 3^{2} & x \leq 2 \end{cases}$$

$\boxed{x \leq 2 \text{ soluz. del sistema}}$

Il sist. di partenza diventa:

$$\begin{cases} x < 3 & \text{con } x \neq -2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$



$x \leq 2$ con $x \neq -2$

esrc. p. 40 n° 41

$$\begin{cases} 6^x + 3^x - 2^x - 1 \le 0 \\ 27^x - 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 \le 0 \end{cases}$$

1ª dis: $6^x + 3^x - 2^x - 1 \le 0$

$6^x = (2 \cdot 3)^x = 2^x \cdot 3^x$

$6^x + 3^x - 2^x - 1 \le 0$

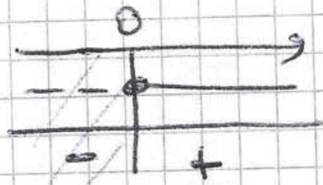
$2^x \cdot 3^x + 3^x - 2^x - 1 \le 0$

$3^x \cdot (2^x + 1) - (2^x + 1) \le 0$ metto in evidenza $2^x + 1$

$(3^x - 1)(2^x + 1) \le 0$

1° f ≥ 0 $\quad 3^x - 1 \ge 0 \quad 3^x \ge 1 \quad 3^x \ge 3^0 \quad x \ge 0$

2° f ≥ 0 $\quad 2^x + 1 \ge 0 \quad 2^x \ge -1 \quad \forall x$



$\boxed{x \le 0}$

la 1ª diseq. è risolta per $\boxed{x \le 0}$

2ª diseq: $27^x - 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 \le 0 \quad \rightarrow \quad 3^{3x} - 2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 \le 0$

sia $y = 3^x$

$y^3 - 2y^2 - 5y + 6 \le 0$ Diseq. di 3° gr.

Scompongo in fattori.

sia $P(y) = y^3 - 2y^2 - 5y + 6$

gli zeri di $P(y)$ sono tra i divisori di 6

$\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6$

$P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0 \qquad P(1) = 0$

1 è uno zero del polinomio.

$P(y)=y^3-2y^2-5y+6$ è divisibile per $y-1$

$$P(y)=(y-1)\cdot Q(y)$$

$Q(y)$ lo trovo con la regola di Ruffini, è un polin. di 2° gr.

$$P(y)=1y^3-2y^2-5y+6$$

	1	−2	−5	+6
1		+1	−1	−6
	1	−1	−6	0

$$y^2-y-6=Q(y)$$

$$P(y)=(y-1)\cdot(y^2-y-6)$$

$$y^2-y-6=0 \qquad y=3,\ y=-2$$

$$P(x)=(y-1)\cdot(y-3)\cdot(y+2)$$

la diseq.

$y^3-2y^2-5y+6\le 0$ diventa

$$(y-1)\cdot(y-3)\cdot(y+2)\le 0$$

1° f ≥ 0 $\quad y\ge 1$

2° f ≥ 0 $\quad y\ge 3$

3° f ≥ 0 $\quad y\ge -2$

$$y\le -2 \quad \vee \quad 1\le y\le 3$$

$y \leq -2 \quad \vee \quad 1 \leq y \leq 3$ ma $y = 3^x$

$3^x \leq -2 \quad \vee \quad 1 \leq 3^x \leq 3$

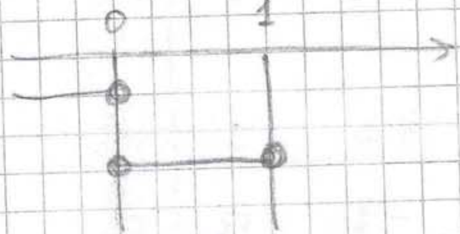
impossib. $\quad 3^0 \leq 3^x \leq 3^1$ possiamo passare alla stessa relaz. tra gli esponenti.

$0 \leq x \leq 1$

la 2ª diseq. è risolta per $0 \leq x \leq 1$

Il sist. di partenza è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$\boxed{x = 0}$

esercc. p. 39 n° 38 a

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{3}{5} > \frac{2}{5^{1-x}}$$

$$\frac{1}{5^x} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5 \cdot 5^{-x}} > 0$$

$$\frac{1}{5^x} - \frac{3}{5} - \frac{2 \cdot 5^x}{5} > 0$$

diseq. frazionaria

$$\frac{5 - 3 \cdot 5^x - 2 \cdot (5^x)^2}{5 \cdot 5^x} > 0$$

moltipl per 5, è una costante.

$$\frac{-2 \cdot (5^x)^2 - 3 \cdot 5^x + 5}{5^x} > 0$$

$$\frac{2(5^x)^2 + 3 \cdot 5^x - 5}{5^x} < 0$$

$N > 0$

$D > 0$

$N > 0$ sia $y = 5^x$

$2y^2 + 3y - 5 > 0$

$y < -\frac{5}{2} \quad \vee \quad y > 1 \quad \rightarrow \quad 5^x < -\frac{5}{2} \quad \vee \quad 5^x > 1$

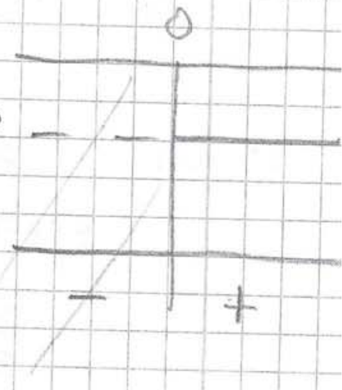
imp. $\quad 5^x > 5^0$

$\Delta > 0 \quad 5^x > 0 \quad \forall x \qquad x > 0$

frazione: $\frac{N}{\Delta} < 0$

Tabella dei segni: $N > 0$ se $x > 0$

$\Delta > 0 \quad \forall x$



Soluz. $X < 0$

es. p. 39 n° 38 b

$9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 \geq 0 \qquad y = 3^x$

$(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x \cdot 3 - 27 \geq 0$

$y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y - 27 \geq 0$

$y^2 + 6y - 27 \geq 0$

$(y - 3)(y + 9) \geq 0$

Soluz: $y \leq -9 \quad \vee \quad y \geq 3$

$3^x \leq -9 \quad \vee \quad 3^x \geq 3$

N.S. $\qquad \boxed{x \geq 1}$

es. p. 39 n° 40 b

$$\begin{cases} 9^x - 3^x - 6 \geq 0 \\ 5^{1-x} + 4 \geq 5^x \end{cases}$$

1° D: $(3^x)^2 - 3^x - 6 \geq 0 \qquad y = 3^x$

$y^2 - y - 6 \geq 0 \qquad y = 3 \quad y = -2$

$y \leq -2 \quad \vee \quad y \geq 3$

$y \leq -2 \quad \vee \quad y \geq 3$ ma $y = 3^x$

$3^x \leq -2 \quad \vee \quad 3^x \geq 3$

N.S. $\qquad x \geq 1$

$$\boxed{x \geq 1}$$

La 1ª diseq. è risolta per $x \geq 1$

2ª dis: $5^{1-x} + 4 \geq 5^x$

$5^1 \cdot 5^{-x} + 4 - 5^x \geq 0$

$\dfrac{5}{5^x} + 4 - 5^x \geq 0$

$\dfrac{5 + 4 \cdot 5^x - (5^x)^2}{5^x} \geq 0$ diseq. fraz.

$\dfrac{(5^x)^2 - 4 \cdot 5^x - 5}{5^x} \leq 0$

$N \geq 0 \quad (5^x)^2 - 4 \cdot 5^x - 5 \geq 0 \qquad y = 5^x$

$y^2 - 4y - 5 \geq 0$

$y = 5 \quad y = -1$

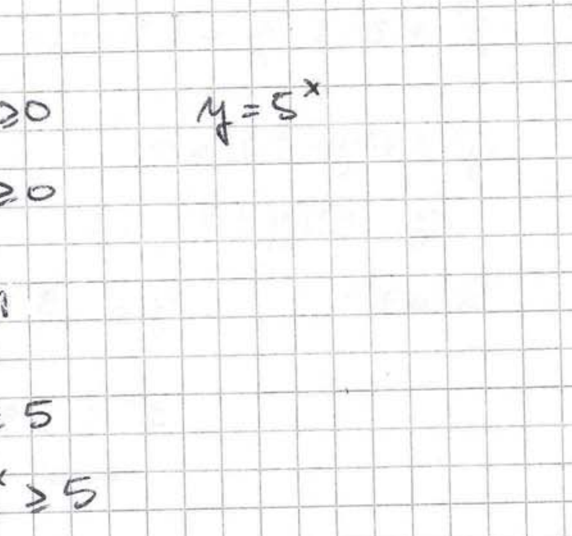
$y \leq -1 \quad \vee \quad y \geq 5$

$5^x \leq -1 \quad \vee \quad 5^x \geq 5$

N.S. $\quad \vee \quad x \geq 1$

$D > 0 \quad 5^x > 0 \quad \forall x$

frazione $\quad \dfrac{N}{D} \leq 0$



$x \leq 1$

Sistema:

$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$ Soluz. $x = 1$