

Equazioni e disequazioni esponenziali

Non sempre si riesce a ricondurre un'equazione (o una disequazione) esponenziale all'uguaglianza (o disuguaglianza) di potenze aventi la stessa base: se si ci trova di fronte ad equazioni del tipo:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} < b^{g(x)} \quad (\text{con } a \neq b)$$

è necessario il concetto di Logaritmo di un numero.

Esistono invece equazioni (o disequazioni) non trattabili algebricamente, ovvero che non si possono ricondurre ad equazioni (o disequazioni) esponenziali elementari o ad equazioni della forma:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} < b^{g(x)}$$

In queste equazioni (o disequazioni) appaiono sia termini esponenziali che algebrici. Possiamo comunque stabilire se le equazioni ammettono o meno soluzioni, interpretandole graficamente.

Esercizio 1: risolvere graficamente le seguenti equazioni stabilendo quante soluzioni ammettono ed individuando, per ciascuna soluzione, un intervallo cui essa appartiene: 1) $2^x + x = 0$, 2) $2^{-x} = -x + 4$

Esercizio 2: risolvere le seguenti equazioni graficamente (e verificare il risultato ottenuto algebricamente):

1) $3^x < -1$ (sol: imp.) 2) $3^x > 1$ (sol $x > 0$) 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ (sol $\forall x$) 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$ (sol. $x > -2$)

Per le disequazioni non risolvibili algebricamente (quando, ad esempio, nella disequazione sono presenti sia termini esponenziali che algebrici, anche in questi casi occorre interpretare la soluzione graficamente ed individuare se la disequazione ha soluzioni e, in caso affermativo, individuare con buona approssimazione gli intervalli dove è verificata.

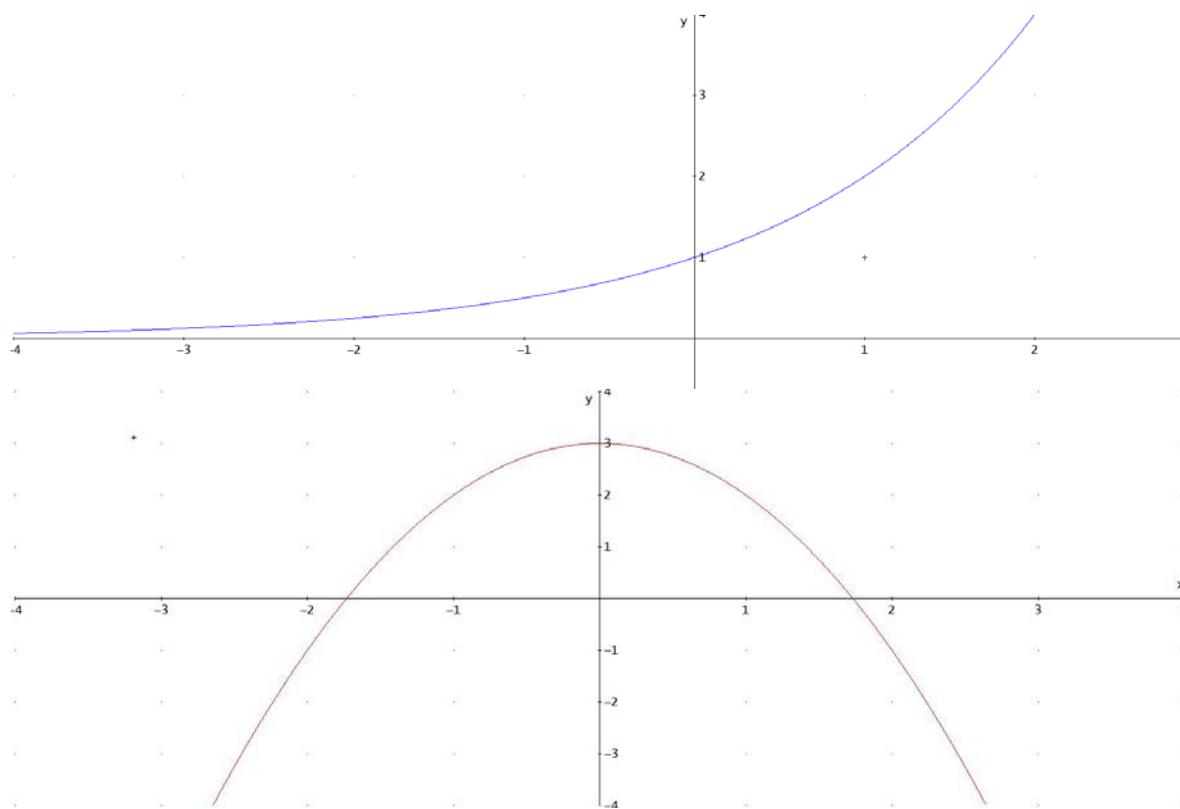
Esercizio risolto Risolvere graficamente:

$$2^x + x^2 - 3 > 0$$

Separare la parte algebrica da quella trascendente

$$2^x > 3 - x^2$$

disegnare $y = 2^x$ ed $y = 3 - x^2$ in uno stesso grafico, cercando quand'è che i punti della prima curva hanno un'ordinata maggiore di quelli della seconda curva.



sol: $x < \alpha$ o $x > 1$ con $\alpha \in (-2, -1)$. **Esercizi (dal libro)** pag.40 dal n. 43 al n. 45. pag. 36 n. 11. pag 37 n. 21,22,24.

Matematica e realtà

432 Colonia di batteri/1. Una colonia è composta inizialmente da 100 batteri. L'evoluzione della popolazione di batteri è descritta dalla funzione:

$$y = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}} \text{ con } t \geq 0$$

dove y è il numero di batteri presenti nella colonia dopo t ore dall'istante iniziale $t = 0$.

- Quanti batteri saranno presenti nella colonia dopo 3 ore?
- Quanti batteri saranno approssimativamente presenti nella colonia dopo 4 ore? (Approssima il risultato all'intero più vicino.)
- Dopo quanto tempo i batteri presenti nella colonia saranno 800?

[a. 200; b. 252; c. 9 ore]

433 Concentrazione di un farmaco nel sangue. In seguito all'assunzione di una compressa di un farmaco, la quantità y di principio attivo (in milligrammi) presente nel sangue del paziente raggiunge un picco di 8 mg, dopo il quale inizia a decrescere, secondo la legge descritta dalla funzione:

$$y = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$$

dove t è il tempo (in ore) trascorso dall'istante iniziale $t = 0$, in cui la quantità di principio attivo nel sangue del paziente è massima, cioè uguale a 8 mg.

- Qual è la quantità di principio attivo presente nel sangue del paziente 2 ore dopo il raggiungimento del picco di 8 mg?
- Qual è la quantità di principio attivo presente nel sangue del paziente 3 ore dopo il raggiungimento del picco di 8 mg?
- Dopo quanto tempo dal raggiungimento del picco di 8 mg la quantità di principio attivo nel sangue del paziente è 0,5 mg?

[a. 4 mg; b. circa 2,8 mg; c. dopo 8 ore]

434 Colonia di batteri/2. Alle 15 di ieri il numero di batteri di una colonia era 500, alle 17 era 2000. Il numero y di batteri della colonia cresce in modo esponenziale, secondo una legge del tipo:

$$y = a \cdot b^t \quad \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0$$

dove t è il tempo (in ore) trascorso a partire dalle 15.

- Quali sono i valori dei parametri a e b ?
- Quanti saranno i batteri della colonia alle 20?

[a. $a = 500, b = 2$; b. 16 000]

Esercizi dalle gare di matematica e in inglese

435 Se $9^x - 9^{x-1} = 216$, qual è il valore di 2^x ?

(High School Math Contest, Texas 2007)

[$4\sqrt{2}$]

436 Trova le coordinate del punto d'intersezione dei grafici di $y = 2^{x+2}$ e $y = 4^{3x-4}$.

(High School Math Contest, Louisiana State University 2004)

[(2, 16)]

437 Se $9^{-x} = 7$, allora qual è il valore di 27^{2x+1} ?

[A] $\frac{27}{7\sqrt{7}}$

[B] $189\sqrt{7}$

[C] $\frac{343}{27}$

[D] $\frac{7\sqrt{7}}{27}$

[E] $\frac{27}{343}$

(High School Math Contest, University of South Carolina 2001)

[E]

438 Solve math in English Solve each equation.

a. $e^{x^2} = e^{4x} \cdot \frac{1}{e^3}$

b. $9^{16-x} = 27^x$

c. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$

[a. 1,3; b. $\frac{32}{5}$; c. 2,3]

439 Solve math in English If $3^x = 2$ what does 9^{-2x} equal? If $2^x = 7$ what does $\frac{2^{x+1} - 2^x}{4^x}$ equal? If $5^x = 27$ what does $5^{-x} \cdot \sqrt[3]{25^{2x}}$ equal?

[$\frac{1}{16}, \frac{1}{7}, 3$]