Esempi (dal libro di testo, p. 22)

esempio n° 8

$$\frac{2^{x+2}}{3} = 3^{x+1}$$

l'incognita appare sia come esponente di 2 che di 3.
In entrambi i termini 2^{x+2}, 3^{x+1} si riconosce un numero, coefficiente dell'incogn

$$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^x$$

$$\frac{2^x \cdot 2^2}{3} = 3^x \cdot 3$$

moltiplico per 3 per far sparire il denominat.

$$2^x \cdot 2^2 = 3^x \cdot 3^2$$

mi riconduco ad un'equazione della forma : $\boxed{n^\circ}^x = \Diamond n^\circ$ usando le formule inverse.

$3^x \neq 0$
divido Tutto per 3^x e per 2^2

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3^2}{2^2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

mi riconduco ad avere basi uguali

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$x = -2$$

esempio n° 9

$$2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-3}$$

ho solo potenze di 2 e 3
quando quando 64 devo pensare a 2^6

$$\underbrace{2^x} \cdot 2^3 = 2^6 \cdot \underbrace{3^x} \cdot 3^{-3}$$

obiettivo : $\boxed{n^\circ}^x = \Diamond n^\circ$

$$\frac{2^x}{3^x} \cdot 2^3 = 2^6 \cdot 3^{-3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2^6}{3^3} \cdot 2^{-3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\rightarrow \boxed{x = 3}$$

Osservazione. Se, durante la risoluzione, un'equazione esponenziale si può ricondurre alla forma

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \quad (\text{con } a \neq b \quad a, b \text{ positivi})$$

per la risoluzione si può seguire la seguente procedura:

0. individuare il campo di accettabilità delle soluzioni (esistenza di $a^{f(x)}$ e $b^{f(x)}$ e quindi di $f(x)$, $g(x)$)
1. dividere tutto per $b^{f(x)}$ (essendo $b^{f(x)} \neq 0$)
2. usare la proprietà che un qualsiasi numero elevato zero, da sempre uno.

$a^{f(x)} = b^{f(x)}$ cerco il dominio di $a^{f(x)}$ e $b^{f(x)}$ (esistenza di $f(x)$)
divido tutto per $b^{f(x)}$

$$\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \qquad \text{ma} \quad 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \qquad \text{a parità di base} \ldots$$

$$f(x) = 0$$

Trovo gli zeri di $f(x)$.
Sono soluzioni accettabili?

esempio

$5^{x-3} = 7^{x-3}$ $\quad f(x) = x-3$ è una funzione polinomiale, $D = \mathbb{R}$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} = 1$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} = \left(\frac{5}{7}\right)^0$$

$\boxed{x = 3}$ soluz. accettabile.

Osservazione 2.

se si hanno basi diverse e funzioni diverse: si ricorre al concetto di "logaritmo di un n°".

$$5^{x+3} = 7^{x-9}$$ si isolano i termini con l'incognita

$$5^x \cdot 5^3 = 7^x \cdot 7^{-9}$$

$$\frac{5^x}{7^x} = \frac{7^{-9}}{5^3}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^x = \frac{1}{7^9 \cdot 5^3}$$ per ricavare x si ricorre al concetto di logaritmo di un n°

$$\log_{\frac{5}{7}}\left(\frac{5}{7}\right)^x = \log_{\frac{5}{7}}\left(\frac{1}{7^9 \cdot 5^3}\right)$$

$$x = \log_{\frac{5}{7}}\left(\frac{1}{7^9 \cdot 5^3}\right)$$

esempio 10 p. 23 sistemi di eq. esponenziali: 2 eq. 2 incognite.

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 7^{xy} = 49 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5^{x+y} = 5^3 \\ 7^{xy} = 7^2 \end{cases}$$ ho eq. esponenz. elementari

ha le stesse soluzioni

il sist. diventa equivalente ad un sistema "somma-prodotto" di 2° grado (sistema simmetrico)

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$$ le soluzioni saranno 2 coppie ordinate di n^i $\mathbb{R}$ (x_1, y_1) ed (x_2, y_2)

"cerco due numeri x ed y la cui somma sia 3 il cui prodotto sia 2" equivale a risolvere un'eq. di 2° grado in t (programma di algebra degli anni precedenti, ripreso in aula).

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 1 \quad e \quad t = 2$$

le soluz. del sist. sono

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$ ovvero $(1,2)$ o $(2,1)$

RISOLUZIONE GRAFICA. p.23 n°11

11) $2^x = 8$ cerco le soluzioni tracciando il grafico di

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 8 \end{cases}$$ in uno stesso sist. di riferim. cartesiano.

l'ascissa del punto di intersezione è la soluzione dell'equaz. di partenza.

12) $x^2 + 2^x = 4$ l'incognita appare in due termini, non solo all'esponente. Separo e risolvo graficamente.

funz. trascendente $y=2^x$ → $2^x = 4 - x^2$ ← funzione algebrica

$y = 4 - x^2$ funz. polinom la rappresento, è una parabola

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$$ le soluzioni del sistema sono le ascisse

dei punti di intersezione (vedere libro) A e B

indicate con x_1 ed x_2 si trova (leggendo il grafico)

$-2 < x_1 < -1$ ed $1 < x_2 < 2$

Conclusione: le soluz. di $x^2 + 2^x = 4$ sono due numeri $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $-2 < x_1 < -1$, $1 < x_2 < 2$

Altro esempio: Trovare gli zeri di $f(x) = 3^x - 5$. Questo significa trovare le soluz. di $f(x) = 0$

ovvero risolvere

$3^x - 5 = 0$

$3^x = 5$

per risolverla posso procedere graficamente.

$$\begin{cases} y = 3^x \\ y = 5 \end{cases}$$ così come svolto in aula.

Esercizi p. 32 n° 31 a

a) $\sqrt{2\sqrt{2}} = 4^{1-x}$ ho solo potenze di 2. l'incognita appare solo a destra.

$$\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 2^{2-2x}$$

$$\left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{2-2x}$$

$$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{2-2x}$$

$$2^{\frac{3}{4}} = 2^{2-2x}$$

$$\frac{3}{4} = 2-2x$$

$$\frac{3-8}{4} = -2x$$

$$-\frac{5}{4} = -2x$$

$$x = \frac{5}{8}$$

es p. 32 n° 31 b

$\frac{1}{4\sqrt{2}} = \sqrt{8^x}$ mi riconduco ad avere potenze di 2.

$$\frac{1}{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = (2^3)^{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2^{2+\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3x}{2}}$$

$$\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{3x}{2}}$$

$$2^{-\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3x}{2}}$$

$$-\frac{5}{2} = \frac{3}{2}x \rightarrow -5 = 3x \qquad x = -\frac{5}{3}$$

es. p. 32 n° 31 c

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2x+1} = 1$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{n}\right)^{0}$$

$$2x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

es. p. 32 n° 37 a

$$\frac{3^{x-1}}{9} = \frac{27^{1-x}}{3^{2+x}}$$ sono tutte potenze di 3

$$\frac{3^{x-1}}{3^2} = \frac{(3^3)^{1-x}}{3^{2+x}}$$

$$3^{x-1-2} = 3^{3(1-x)-2-x}$$

$$3^{x-3} = 3^{3-3x-2-x}$$

$$3^{x-3} = 3^{1-4x}$$ a parità di base ...

$$x-3 = 1-4x$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

es. p. 32 n° 37 b

$$\frac{\sqrt[3]{32^x}}{(2^{x+2})^{x-2}} = 1$$ ho solo potenze di 2. $32 = 2^5$

$$\frac{2^{\frac{5x}{3}}}{2^{x^2-4}} = 1$$ prodotto in croce: $2^{x^2-4} \neq 0 \quad \forall x$

$$2^{\frac{5x}{3}} = 2^{x^2-4}$$

$\frac{5}{3}x = x^2 - 4$

$5x = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 5x - 12 = 0$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{4}{3}$

esercizio p. 32 n°40

$\sqrt[x-1]{125} \cdot \sqrt[x+2]{5^8} = \sqrt[x-1]{25} \cdot \sqrt[2x-1]{5^9}$

NOTA : $\begin{cases} 2x-1 \in \mathbb{N} \\ x-1 \in \mathbb{N} \\ x+2 \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\frac{n^\circ\ \mathbb{N}}{n^\circ \text{ intero positivo}}$

l'incognita appare solo nell'indice delle radici.
la logica di risoluzione è sempre quella di ricondursi – ove possibile – a potenze di ugual base

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Ho solo potenze di 5. $125 = 5^3$ $\sqrt[x-1]{125} = (5^3)^{\frac{1}{x-1}}$

$5^{\frac{3}{x-1}} \cdot 5^{\frac{8}{x+2}} = 5^{\frac{2}{x-1}} \cdot 5^{\frac{9}{2x-1}}$

$5^{\frac{3}{x-1} + \frac{8}{x+2}} = 5^{\frac{2}{x-1} + \frac{9}{2x-1}}$ a parità di base...

$$\frac{3}{x-1} + \frac{8}{x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{9}{2x-1} \quad (1)$$

Condizioni di accettabilità delle soluzioni:

$x \neq 1$
$x \neq -2$
$x \neq \frac{1}{2}$

$D = \mathbb{R} - \{-2, 1, \frac{1}{2}\}$

a cui va aggiunto: $x-1, x+2, 2x-1 \in \mathbb{N}$ per l'esistenza dei radicali.

Risolvo (1): è un'eq. frazionaria MA prima di "buttarmi a capofitto" nei conti, osservo che $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{8}{x+2} = \frac{9}{2x-1}$$

$$\frac{(x+2)(2x-1) + 8(x-1)(2x-1) - 9(x-1)(x+2)}{(x-1)\cancel{(x+2)}(2x-1)} = 0$$

4

$$2x^2 - x + 4x - 2 + 8(2x^2 \underbrace{-x - 2x}_{-3x} + 1) - 9(x^2 + \underbrace{2x - x}_{x} - 2) = 0$$

$$2x^2 + 3x - 2 + 16x^2 - 24x + 8 - 9x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$9x^2 - 30x + 24 = 0$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

$x = 2$ SOL. ACC.

$x = \frac{4}{3}$

Per stabilire se siano soluzioni accettabili, sostituisco $x = \frac{4}{3}$ negli indici: $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ basterebbe già questo ad escludere la soluzione.

$$\begin{cases} \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3} \notin \mathbb{N} \\ 2 \cdot \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

esercizio p. 32 n° 40b

$$\frac{9^{x+1}}{27^{3-2x}} = \frac{1}{81}\cdot 3^{1+x}$$ ho solo potenze di 3

$$\frac{9^x\cdot 9}{27^3\cdot 27^{-2x}} = \frac{1}{81}\cdot 3\cdot 3^x$$ scompongo le potenze

$27^3 = (3^3)^3 = 3^9$

$81 = 3^4$

$9^x = 3^{2x}$; $27^{-2x} = (3^3)^{-2x} = 3^{-6x}$

e riordino

$$\frac{3^{2x}\cdot 3^2}{3^{-6x}\cdot 3^9} = \frac{1}{\cancel{3^4}_{3}}\cdot \cancel{3}\cdot 3^x$$

semplifico : $\frac{3^2}{3^9} = \frac{1}{3^7} = 3^{-7}$; $\frac{3^{2x}}{3^{-6x}} = 3^{2x-(-6x)} = 3^{2x+6x} = 3^{8x}$

$$3^{2x+6x}\cdot 3^{-7} = 3^{-3}\cdot 3^x$$

$$3^{8x-7} = 3^{x-3}$$ se due potenze aventi la stessa base sono uguali, allora lo sono anche gli espon.

$8x - 7 = x - 3$

$7x = 4$

$x = \frac{4}{7}$

eserc. p. 32 n° 49

$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7$ $\left.\begin{matrix}2^{x-1}\\2^{x-2}\end{matrix}\right\}$ li trasformo per ottenere 2^x moltiplicato per un numero.

$\underbrace{2^x} + \underbrace{2^x}\cdot 2^{-1} + \underbrace{2^x}\cdot 2^{-2} = 7$

sia $y = 2^x$

$y + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y = 7$ eq. di 1° gr. a coeff. frazionari

$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y = 7$

$\frac{\cancel{7}^{1}}{4}y = \cancel{7}^{1}$

$y = 4$ ma $y = 2^x$

$2^x = 4 \longrightarrow x = 2$

esercizio p. 33 n° 50

$$3^{x+1} - \frac{3^x}{9} + 3^x = 35$$

$$3^x \cdot 3 - \frac{1}{9} \cdot 3^x + 3^x = 35$$

$$3^x \cdot \left(3 - \frac{1}{9} + 1\right) = 35$$

$$3^x \cdot \frac{\cancel{35}^{1}}{9} = \cancel{35}^{1}$$

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

es. p. 33 n° 59

$$3^{2x} - 3^x - 6 = 0 \qquad \text{sia } 3^x = y$$

è un quadrato!

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$1 = 1$

$p = -6 \leftarrow$ n^i discordi

i divisori di 6 sono

$\pm 1, 2, 3, \pm 6$

∓ 6	± 1	?
$+3$	-2	sì

1) $y = 3$

$3^x = 3$

$x = 1$

2) $y = -2$

$3^x = -2$ N.S.

p. 33 n° 61 c

$$2^{2x} + 2^{x+1} - 8 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2^x \cdot 2 - 2^3 = 0 \qquad 2^x = y$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0 \qquad -4 \; ; \; 2$$

1. $y = -4$

$2^x = -4$ N.S.

2. $y = 2$

$2^x = 2 \qquad x = 1$

es. p. 33 n° 65 c

$(2^x+4)\cdot(3^x-9)=0$ uso la legge di annullamento del prodotto.

prodotto di due fattori uguagliato a zero

1° f = 0 $\quad 2^x+4=0$

$2^x=-4$ N.S.

2° f = 0 $\quad 3^x=9$

$x=2$

es. p. 33 n° 67

$$\frac{3^{2-x}-3^{1-x}}{9^{x+1}-3^{2x+1}}=27^{1+3x}$$

trasformo gli esponenti

$$\frac{3^2\cdot 3^{-x}-3\cdot 3^{-x}}{(3^2)^{x+1}-3^{2x}\cdot 3}=(3^3)^{1+3x}$$

al numeratore, sommo i termini simili mettendo in evidenza

$$\frac{3\cdot(3-1)\cdot 3^{-x}}{3^{2x}\cdot 3^2-3^{2x}\cdot 3}=3^3\cdot 3^{9x}$$

idem al denominatore.

$$\frac{3\cdot 2\cdot 3^{-x}}{3^{2x}\cdot(9-3)}=3^3\cdot(3^x)^9$$

$$\frac{\cancel{6}^{\,1}}{3^x\cdot 3^{2x}\cdot\cancel{6}_{\,1}}=3^3\cdot(3^x)^9$$

$$\frac{1}{3^{3x}}=3^3\cdot 3^{9x}$$

scambio

$$\frac{1}{3^3}=3^{12x}$$

$$3^{-3}=3^{12x}$$

$\boxed{12x=-3}$ $\boxed{x=-\frac{1}{4}}$

Suggerimenti utili per lo svolgimento dei compiti a casa:

- p 35 n° 2

$$\begin{cases} \dfrac{2^{x-1}}{4^{1+y}} = 16 \cdot 8^{x+y} & \text{ho solo potenze di 2} \\[2ex] \dfrac{5}{25^{x+y}} = \dfrac{1}{125^{2x}} & \text{ho solo potenze di 5} \end{cases}$$

Lavoro sulla 1ª equazione. Cerco di ricondurmi alla forma CANONICA

$$\frac{2^x \cdot 2^{-1}}{2^{2+2y}} = 2^4 \cdot 2^{3x+3y}$$

trasformo in modo da ottenere $a^{f(x;y)} = a^{g(x;y)}$

Nota: state attenti le funzioni dell'esponente hanno 2 incognite.

$$2^{x-1-2-2y} = 2^{4+3x+3y}$$

$$x-3-2y = 4+3x+3y$$

$$-2x-5y = +3+4$$

$$\boxed{x+5y=-7}$$

2ª equaz:

$$\frac{5}{5^{2x+2y}} = \frac{1}{5^{6x}}$$

$$1-2x-2y = -6x$$

$$4x-2y = -1$$

Il sist. originario diventa:

$$\begin{cases} 2x+5y=-7 \\ 4x-2y=-1 \end{cases} \quad -2\cdot \begin{cases} 1^a \text{ eq.} \\ 2^a \text{ eq} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x-10y=+14 \\ 4x-2y=-1 \end{cases}$$

$$/ \quad -12y = 13$$

$$y = -\frac{13}{12}$$

Risolvo

$$\begin{cases} y = -\frac{13}{12} \\ 4x - 2 \cdot y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{13}{12} \\ 4 \cdot x - 2 \cdot \left(-\frac{13}{12}\right) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{13}{12} \\ x = -\frac{19}{24} \end{cases}$$

es. p. 37 n° 25

$$(x+2)(1-2x) = x \cdot 2^x + 2^{x+1}$$

parte algebrica e parte trascendente.

$$(x+2)(1-2x) = x \cdot 2^x + 2^x \cdot 2$$

$$(x+2)(1-2x) = 2^x (x+2)$$

se $x \neq -2$ ricavo 2^x dividendo tutto per $x+2$

$$1 - 2x = 2^x$$